

文章编号:1004-4736(2008)01-0034-03

橡胶材料硬化的本构模型与有限元分析

朱艳峰,王红

(广东工业大学建设学院工程力学研究所,广东 广州 510640)

摘要:针对橡胶类材料大应变时硬化现象,采用国家 GB528 标准,在室温下通过单轴拉伸本构实验,建立了基于主伸长的连续介质力学的新本构模型,并确定应变能密度函数中的本构参数,再利用简单剪切实验进行参数验证,表明新本构关系的可行性与有效性,最后将新本构方程加入通用有限元软件,利用非线性有限元对平面应力橡胶板进行了计算。

关键词:橡胶类材料;材料硬化;本构模型;非线性有限元

中图分类号:O 345 文献标识码:A

0 引言

橡胶类材料产生大的应变时具有高度几何非线性、材料非线性,又呈现出硬化或软化现象,且体积不可压缩。橡胶材料的本构模型主要有^[1]:

- a. 基于分子链形式的统计学模型。
- b. 基于不变量形式的模型。
- c. 基于主伸长的连续介质力学模型等。

针对大应变硬化现象的本构模型目前有 neo-Hookean 型^[2]、Mooney-Rivlin^[3] 型等。在对橡胶类材料的有限元分析过程中,由于其本构理论尚未成熟,导致分析结果的差别非常大。本文通过简单拉伸本构实验确定材料变形模式,用回归分析方法把实验得到的应力—应变数据拟合为一适当的应变能函数,建立了一种新的橡胶材料硬化模型,并推广到复杂的变形形式,通过验证并加入通用有限元软件,针对平面应力橡胶板进行了计算,为橡胶材料硬化时进一步的本构研究提供了基础。

1 橡胶材料硬化的本构实验

橡胶材料的本构实验试件采用硫化橡胶,在 160℃ 下保持 10 MPa 压力,硫化 6 min,配方及质量比如表 1 所示。

表 1 试件配方及质量比

Table 1 The test-piece in parts by weight

湛江农垦局天 然橡胶(1#)	S	ZnO	SA	防 264	N330	CZ	TT
100%	1.0%	4.0%	2.0%	1.5%	3%	1.0%	0.2%

收稿日期:2006-11-12

作者简介:朱艳峰(1968-),女,山西五台人,博士研究生,讲师,研究方向:工程材料力学行为。

1.1 单轴拉伸实验

试件为哑铃型,如图 1 所示。规格尺寸符合 GB528 标准,室温 26℃,采用岛津电子拉伸试验机,拉伸速度为(500±50) mm/min,共 5 组试件,试件拉力与伸长比实验曲线如图 2。

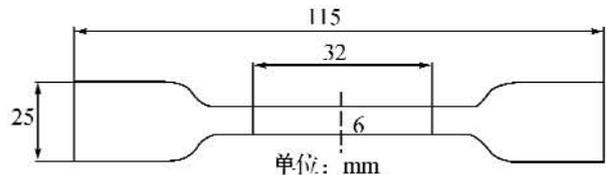


图 1 单轴拉伸试件

Fig. 1 Rubber test piece for simple tension

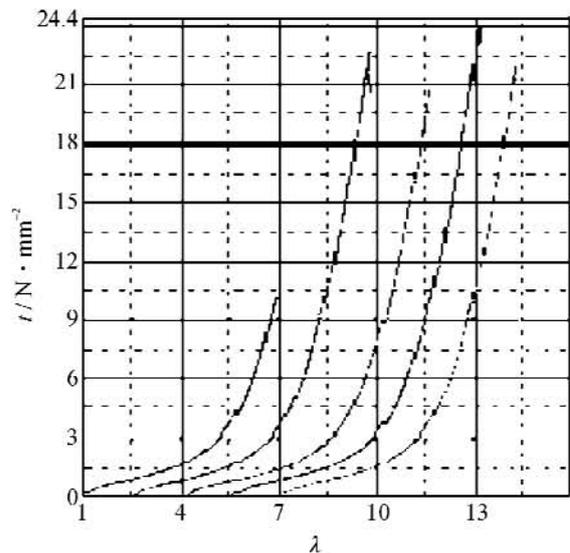


图 2 拉应力 t -伸长率 λ 曲线

Fig. 2 The curve of stress t versus extension

1.2 简单剪切

由于没有国家标准,参照 Treloar 1943 年的实验^[4],矩形试件,宽 60 mm,厚 2 mm,测试长度

5 mm,用夹具分别夹住长边,室温 160℃,拉伸速度为(500±50) mm/min,实验数据如表 2.

表 2 简单剪切的最大应力与应变

Table 2 The maximal stress and strain on simple shear

试件	最大应力 / N · mm ⁻²	最大应变 / %
1	5.3333	493.33
2	5.6667	543.33
3	5.1333	486.67
平均	5.3777	507.78

2 橡胶类材料硬化时的新本构模型

常温条件下,橡胶类材料为各项同性超弹性材料,本构模型以应变能函数的形式来表示, I_1, I_2, I_3 为右 Cauchy-Green 变形张量的第一、二、三基本不变量,在初始无应力构形且不考虑大应变硬化时应变能函数 W 可表示为^[5]

$$W = W(I_1, I_2, I_3)$$

$$I_1 = tr C = C : I = C_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \{ (tr(C))^2 - tr(C^2) \} = \frac{1}{2} \{ I_1^2 - C_{ij} C_{ji} \}$$

$$I_3 = \det C.$$

橡胶类材料在变形过程中近似认为体积不可压缩,变形后与变形前的体积比 $J = 1$. 由本构实验,针对大应变时呈现出的明显硬化现象,本文提出一种新的应变能函数:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \varphi) = \mu(I_1 - 3)(I_2 - 3) + H(\varphi)$$

$$\varphi = (\lambda^* - \lambda_1)(\lambda^* - \lambda_2)(\lambda^* - \lambda_3)$$

$$\frac{dH}{d\varphi} = -\frac{k}{\varphi^2}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为主伸长, λ^* 为极限伸长.

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \varphi) = \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

即 φ 为无穷时,又回到应变能不考虑硬化的传统形式, \tilde{W} 为所谓的根应变能.

单轴拉伸时,第一类 Piola-kirchhoff 应力

$$f = \mu \left[\left(2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3 \right) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \right] + \frac{dH}{d\varphi} \lambda^* \left(\lambda^* - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \left(\lambda^{\frac{3}{2}} - 1 \right).$$

对单轴拉伸试验数据进行拟合,得:

$$\mu = 0.0048 \text{ MPa}, \lambda^* = 9.47, k = 9233$$

由此绘出拉伸曲线,如图 3 所示;将上述参数代入新本构方程,计算简单剪切时的 $f-\lambda$ 曲线与实验值进行比较如图 4 所示.可知,本文提出的本构关系能够较好反映橡胶材料在单轴拉伸时的硬化现象,且与剪切硬化实验吻合良好,故可适用于对此类橡胶材料硬化进行力学分析.

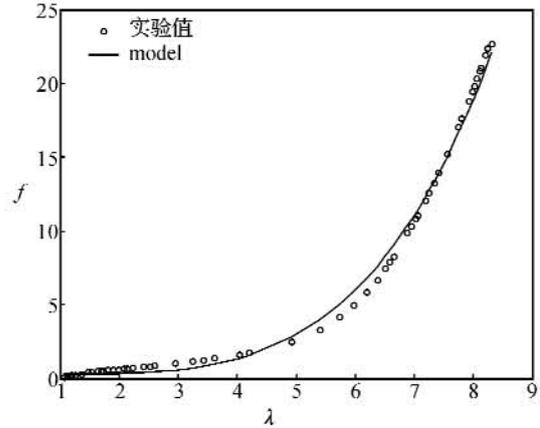


图 3 单轴拉伸曲线

Fig. 3 The curve of simple extension

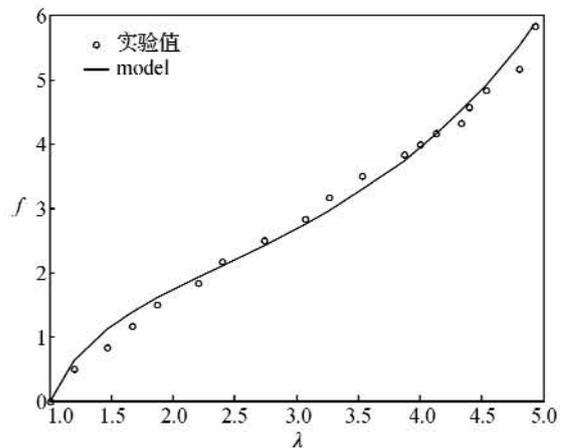


图 4 简单剪切曲线

Fig. 4 The curve of simple shear

3 有限元分析

第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 S 与 Green 应变张量 E 存在下列关系

$$\dot{S} = C : \dot{E}$$

\dot{S} 与 \dot{E} 分别为应力张量与应变张量的率形式,因此

$$S = \sum_{\alpha=1}^3 2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\alpha}^2} N_{\alpha} \otimes N_{\alpha}$$

N_{α} 为原始构形中沿主方向的正交单位向量.本构方程中的 Lagrangian 弹性张量

$$C = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_{\alpha}^2 \partial \lambda_{\beta}^2} N_{\alpha} \otimes N_{\alpha} \otimes N_{\beta} \otimes N_{\beta} + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 2 \frac{S_{\alpha\alpha} - S_{\beta\beta}}{\lambda_{\alpha}^2 - \lambda_{\beta}^2} N_{\alpha} \otimes N_{\beta} \otimes N_{\alpha} \otimes N_{\beta}$$

因此,对于新本构函数

$$C = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 4\mu(3I_1 - 3 - \lambda_{\alpha}^2 - \lambda_{\beta}^2) N_{\alpha} \otimes N_{\alpha} \otimes N_{\beta} - \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 2\mu(I_1 - 3) N_{\alpha} \otimes N_{\beta} \otimes N_{\alpha} \otimes N_{\beta}$$

4 算 例

本文利用通用有限元软件,加入新本构方程,对矩形均匀伸长的橡胶薄板进行了计算,薄板长 100 mm,宽 50 mm,厚 2 mm,中心开孔直径 5 mm,近似认为平面应力.计算时利用二阶平面应力减缩积分单元,1/4 橡胶薄板的网格划分与位移、应力计算结果如图 5,6,7 所示,此时,板伸长为 15.52 mm,最大应力 0.6 MPa.

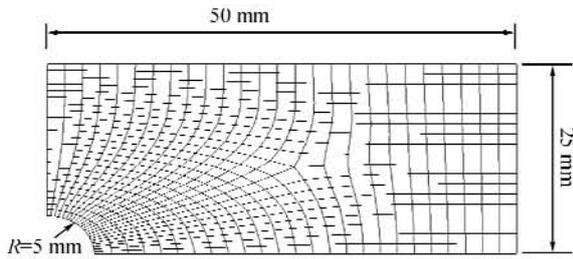


图 5 中间开孔的 1/4 橡胶薄板网格划分

Fig. 5 Rubber elastic sheet with a circular hole - the geometry and the mesh for a quarter-sheet



图 6 位移分布图

Fig. 6 Final displaced configuration of the quarter-sheet



图 7 应力分布图

Fig. 7 Final stress distributing of the quarter-sheet

参考文献:

- [1] 朱艳峰,刘 锋,黄小清,等. 橡胶材料的本构[J]. 橡胶工业, 2006,53(1):119-125.
- [2] Horgan, Saccomandi. Constitutive modeling of rubber-like and biological materials with limiting chain extensibility[J]. Mathematics and mechanics of solids, 2002,(7):353-371.
- [3] 朱艳峰,刘 锋,黄小清,等. 橡胶类材料大应变时明显硬化的本构分析[J]. 暨南大学学报, 2005,26(1):98-99.
- [4] Treloar L R G. Stress-Strain data for vulcanized rubber under various of deformation [J]. Trans Faraday Soc, 1944,40(6):59-70.
- [5] Ogden R W. Non-Linear Elastic Deformations[M]. Chichester, UK;Ellis Horwood, 1984.

Constitutive study of the hardening of rubber-like materials and its nonlinear FEM analysis

ZHU Yan-feng, WANG Hong

(Faculty of Construction Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: The new constitutive function of rubber-like materials with hardening phenomenon is established in this article, basing on the experiment of simple axial extensibility according to the national related norm GB528. The constitutive data for the new model is fitted and the simple shearing experiment is utilized to prove the feasibility of the constitutive equation produced in this paper. At last a rubber-like materials member with plane-stress is calculated by the new constitutive function inserted in the current FEM software.

Key words: rubber like materials; material hardening; constitutive equation; nonlinear finite element analysis

本文编辑:萧 宁