第 30 卷第 1 期　　　　武　汉　工　程　大　学　学　报　　　　Vol. 30　No. 1
2008 年 01 月　　　　J.　Wuhan　Inst.　Tech.　　　　Jan.　2008

文章编号：1004－4736(2008)01－0111－02

# 非齐次边界条件定解问题的一种齐次化函数形式

陈　杰，陈丽华
（武汉工程大学电气信息学院，湖北 武汉 430074）

摘　要：通过对非齐次边界条件的定解问题的讨论，引出了本文的论题，对非齐次边界条件定解问题的边界条件齐次化函数提出了一种比较一般和标准的形式，并提出了一个定理．对该定理进行了证明，证明了它的正确性．利用该定理可以非常方便地求解关于非齐次边界条件定解问题的齐次化函数．

关键词：齐次化函数；齐次化函数形式；非齐次边界条件
中图分类号：O 411.1　　　文献标识码：A

## 0　引　言

对于如何求解非齐次边界条件定解问题的边界条件齐次化函数，在文献中都只是具体求解[1～5]，或列举几种类型以表格形式给出[6]．本文通过对以往文献资料的总结，给出的形式较之以往更具一般性和标准性．

## 1　论题的引出

对于非齐次边界条件的定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

$$u(x,t)|_{x=0}=u_1(t),u(x,t)|_{x=l}=u_2(t)$$

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\Phi(x)$$

这里，令：$U(x,t)=V(x,t)+W(x,t)$

其中，$W(x,t)$满足：

$W(x,t)|_{x=0}=u_1(t)$，$W(x,t)|_{x=l}=u_2(t)$

这里，$W(x,t)$叫做边界条件的齐次化函数．

定理　若已知，$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}|_{x=0}=u_1(t)$，$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}|_{x=l}=u_2(t)$，$m\geqslant 0$，$n\geqslant 0$，则边界条件的齐次化函数具有的其中一种形式为：

$$W(x,t)=\begin{cases}A(t)x^m+B(t)x^{n+1} & m\neq n+1\\ A(t)x^m+B(t)x^{m-1} & m=n+1\end{cases}$$

其中，$A(t)$，$B(t)$分别是关于$t$的函数．

## 2　论题的证明

证明：

当$m=n+1$时，令$W(x,t)=\frac{u_1(t)}{m!}x^m+\frac{u_2(t)-lu_1(t)}{(m-1)!}x^{m-1}$

因为$\frac{\partial^m W}{\partial x^m}|_{x=0}=m!\ \frac{u_1(t)}{m!}=u_1(t)$

$$\frac{\partial^n W}{\partial x^n}|_{x=l}=$$

$$m!\ \frac{u_1(t)}{m!}x+(m-1)!\ \frac{u_2(t)-lu_1(t)}{(m-1)!}=u_2(t)$$

所以$W(x,t)=\frac{u_1(t)}{m!}x^m+\frac{u_2(t)-lu_1(t)}{(m-1)!}x^{m-1}$是该非齐次边界条件定解问题的一个齐次化函数．

又因为$\frac{u_1(t)}{m!}=A(t)$，$\frac{u_2(t)-lu_1(t)}{(m-1)!}=B(t)$分别是关于$t$的函数，所以当$m=n+1$时，$W(x,t)=A(t)x+B(t)x$是该非齐次边界条件定解问题的一种齐次化函数形式．

当$m>n+1$时，令$W(x,t)=\frac{u_1(t)}{m!}x^m+\left(\frac{u_2(t)}{l(n+1)!}-\frac{l^{(m-n)}u_1(t)}{l(n+1)!\ (m-n)!}\right)x^{n+1}$

因为$\frac{\partial^m W}{\partial x^m}|_{x=0}=m!\ A(t)=u_1(t)$

$$\frac{\partial^n W}{\partial x^n}|_{x=l}=$$

$$\frac{m!}{(m-n)!}A(t)x^{(m-n)}+(n+1)!\ B(t)x=u_2(t)$$

所以$W(x,t)=\frac{u_1(t)}{m!}x^m+\left(\frac{u_2(t)}{l(n+1)!}-\frac{l^{(m-n)}u_1(t)}{l(n+1)!\ (m-n)!}\right)x^{n+1}$是该非齐次边界条件定解问题的一个齐次化函数．

又因为$\frac{u_1(t)}{m!}=A(t)$，$\frac{u_2(t)}{l(n+1)!}-$

收稿日期：2006－05－08

作者简介：陈　杰(1958－)，男，湖北安陆人，副教授，硕士．研究方向：系统建模，高等过程控制．

$\frac{l^{(m-n)}u_1(t)}{l(n+1)!\,(m-n)!}=B(t)$分别是关于 $t$ 的函数，所以当 $m>n+1$ 时 $W(x,t)=A(t)x^m+B(t)x^{n+1}$ 是该非齐次边界条件定解问题的一种齐次化函数形式.

当 $m=n$ 时，令 $W(x,t)=\frac{u_1(t)}{m!}x^m+\frac{u_2(t)-u_1(t)}{(m+1)!\,l}x^{m+1}$

因为 $\frac{\partial^m W}{\partial x^m}|_{x=0}=m!\,A(t)=u_1(t)$

$\frac{\partial^n W}{\partial x^n}|_{x=l}=m!\,A(t)+(m+1)!\,B(t)x=u_2(t)$

所以 $W(x,t)=W(x,t)=\frac{u_1(t)}{m!}x^m+\frac{u_2(t)-u_1(t)}{(m+1)!\,l}x^{m+1}$是该非齐次边界条件定解问题的一个齐次化函数.

又因为$\frac{u_1(t)}{m!}=A(t)$，$\frac{u_2(t)-u_1(t)}{(m+1)!\,l}=B(t)$分别是关于 $t$ 的函数，所以当 $m=n$ 时，$W(x,t)=A(t)x^m+B(t)x^{m+1}$是该非齐次边界条件定解问题的一种齐次化函数形式.

当 $m<n$ 时，令 $W(x,t)=\frac{u_1(t)}{m!}x^m+B(t)x^{n+1}$

因为

$\frac{\partial^m W}{\partial x^m}|_{x=0}=$

$m!\,A(t)+\frac{(n+1)!}{(n-m+1)!}B(t)x^{n-m+1}=u_1(t)$

$\frac{\partial^n W}{\partial x^n}|_{x=l}=(n+1)!\,B(t)x=u_2(t)$

所以 $W(x,t)=\frac{u_1(t)}{m!}x^m+\frac{u_2(t)}{l(n+1)!}x^{n+1}$是该非齐次边界条件定解问题的一个齐次化函数.

又因为$\frac{u_1(t)}{m!}=A(t)$，$\frac{u_2(t)}{l(n+1)!}=B(t)$分别是关于 $t$ 的函数，所以当 $m<n$ 时，$W(x,t)=A(t)x^m+B(t)x^{n+1}$是该非齐次边界条件定解问题的一种齐次化函数形式.

综上所述，当 $m\geqslant 0$，$n\geqslant 0$ 时，

$W(x,t)=A(t)x^m+B(t)x^{n+1}\quad m\neq n+1$

$W(x,t)=A(t)x^m+B(t)x^{m+1}\quad m=n+1$

是该非齐次边界条件定解问题的其中一种齐次化函数形式

参考文献：

[1] 李俊芳，陈自高. 一类非齐次边值的非线性椭圆方程的可解性[J]. 河南师范大学学报(自然科学版)，2006，(1)：20-23.

[2] 陆立柱. 第一、二、三类非齐次线性边界条件的齐次化[J]. 山西师范大学学报(自然科学版)，2001，(4)：17-20.

[3] Hledbrand F B. 应用高等数学[M]. 陈授章译. 北京：人民教育出版社，1980. 83-84.

[4] 布达克 B M. 数学物理题解[M]. 张石生等(译). 重庆：科学技术出版社重庆分社，1982. 62-65.

[5] 杨奇林. 数学物理方程与特殊函数[M]. 北京：清华大学出版社，2004. 57-60.

[6] 郭玉翠. 数学物理方法[M]. 北京：北京邮电大学出版社，2003. 71-72.

# A homogeneous function style in the problem of sure resolution of unhomogeneous boundary condition

*CHEN Jie，CHEN Li-hua*

(School of Electric and Information Engineering，Wuhan Institute of Technology，Wuhan 430074，China)

**Abstract**：There is a relatively complete style of homogeneous function about the boundary condition in the problem of sure resolution of unhomogeneous boundary condition，which is based on the summarizing of mass former experiences and is proved in this article. It can be very easy to work out the homogeneous function in use of the therom which is proved in this article，too.

**Key words**：homogeneous function；the style of homogeneous function；unhomogeneous boundary condition

本文编辑：萧 宁