文章编号：1004－4736(2008)01－0120－02

广义第二类 Stirling 数及其性质

胡端平

（武汉工程大学理学院，武汉 430074）

摘　要：第二类 Stirling 数可以从不同背景中得到，且有许多应用. 本文利用对有限集合的分划方案数提出了广义第二类 Stirling 数，使第二类 Stirling 数成为它的特例，并证明了广义第二类 Stirling 数的基本性质. 同时，利用广义第二类 Stirling 数对分配问题的计数进行了研究.

关键词：广义第二类 Stirling 数；分划；分配

中图分类号：O157　　文献标识码：A

0　引　言

Stirling 数在组合数学、计算数学等方面有重要应用，它们有许多有趣的性质[1～5]. 本文对第二类 Stirling 数进行了推广，得到了广义第二类 Stirling 数. 证明了广义第二类 Stirling 数的一些基本性质，并利用所得结果，对一些组合计数问题进行了研究.

1　广义第二类 Stirling 数及其性质

定义 1.1　设集合 A 有 n 个元素，将 A 分成 k 类且每类中至少有 $r(n\geqslant kr)$ 个元素，称为 A 的 $k-r$ 分划. A 的所有 $k-r$ 分划方法的数目记为 $S_2(n,k,r)$，并称之为广义第二类 Stirling 数.

显然，当 $r=1$ 时，$S_2(n,k,1)$ 即为第二类 Stirling 数，因此以后记 $S_2(n,k,1)=S_2(n,k)$.

定理 1.1　设集合 A 有 n 个元素，则 A 的广义第二类 stirling 数满足：

$$S_2(n,k,r)=\binom{n-1}{r-1}S_2(n-r,k-1,r)+kS_2(n-1,k,r),n>kr,k\geqslant 2,r\geqslant 1 \qquad (1)$$

证　将 A 的 $k-r$ 分划分为如下两类：

a. A 的 $k-r$ 分划的子集中含 a_1 且恰好有 r 个元素. 先从 $\{a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 中取 $r-1$ 个元素，有 $\binom{n-1}{r-1}$ 种取法，将 a_1 加入到所取 $r-1$ 个元素中，再对剩下的 $n-r$ 个元素分成 $k-1$ 类且每类至少有 r 个元，有 $S_2(n-r,k-1,r)$ 种. 由乘法原理知 A 的 $k-r$ 分划中含 a_1 且恰好 r 个元的子集的分划数为 $\binom{n-1}{r-1}S_2(n-r,k-1,r)$.

b. 含 a_1 且多于 r 个元的子集的 A 的 $k-r$ 分划，先将 a_1 从 A 中拿出，即对 $\{a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 进行 $k-r$ 分划，分划数为 $S_2(n-1,k,r)$，再将 a_1 放入分划的子集（类）中，有 k 种放法，故含 a_1 且多于 r 个元的 A 的 $k-r$ 分划数为 $kS_2(n-1,k,r)$.

由加法原理知 A 的 $k-r$ 分划数为：

$$\binom{n-1}{r-1}S_2(n-r,k-1,r)+kS_2(n-1,k,r)$$

即(1)式成立.

特别地，当 $r=1$ 时有，

$$S_2(n,k)=S_2(n-1,k-1)+kS_2(n-1,k)^{[1]} \qquad (2)$$

定理 1.2　$$S_2(n,k,r)=\sum_{m=0}^{n-r}\binom{n-1}{m}S_2(m,k-1,r),n>kr,k\geqslant 2,r\geqslant 1 \qquad (3)$$

证　设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，对 A 进行 $k-r$ 分划. 按含 a_1 的子集元素的个数分类进行计数. 其中含 a_1 的子集有 $p(r\leqslant p\leqslant n-(k-1)r)$ 个元素的方案数如下计算：

先从除 a_1 以外的元素 $\{a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 中取 $p-1$ 个（与 a_1 构成含 a_1 且有 p 个元素的子集），有 $\binom{n-1}{p-1}=\binom{n-1}{n-p}$ 种，再对另外 $n-p$ 个元素分成 $k-1$ 个子集且每个子集的元素至少为 p 个，有 $S_2(n-p,k-1,r)$ 种，于是子集含 a_1 且元素为 p 个的分划方案数为 $\binom{n-1}{n-p}S_2(n-p,k-1,r)$ 种.

由加法原理，A 的所有 $k-r$ 分划数共有：

$$S_2(n,k,r)=\sum_{p=r}^{n-(k-1)r}\binom{n-1}{n-p}S_2(n-p,k-1,r)=$$

收稿日期：2006－12－13

作者简介：胡端平(1950－)，男，湖北孝感人，教授. 研究方向：多元统计分析.

$$\sum_{m=(k-1)r}^{n-r}\binom{n-1}{m}S_2(m,k-1,r)$$

注意到当 $m<(k-1)r$ 时有 $S_2(m,k-1,r)=0$,从而有:

$$S_2(n,k,r)=\sum_{m=0}^{n-r}\binom{n-1}{m}S_2(m,k-1,r)$$

当 $r=1$ 时,(3)式成为:

$$S_2(n,k)=\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}S_2(m,k)$$

这便是第二类Stirling数的基本公式之一[2].

2 广义第二类 *Stirling* 数与分配计数

分球入盒是典型的组合中的分配问题.我们知道,将 n 个可辨的球放入 k 个不同的盒中,无一空盒的分配方案数为 $k!\ S_2(n,k)$[2],$k\leqslant n$.

定理2.1 将 n 个可辨的球放入 k 个可辨的盒中(盒内无序),每盒至少 r 个球,其方案数为 $q(n,k,r)$,则

$$q(n,k,r)=k!\ S_2(n,k,r) \tag{4}$$

证 先将 n 个球分成 k 类且每类中至少 r 个球,有 $S_2(n,k,r)$ 种分法;然后将每类分别各放入1盒内,有 $k!$ 种放法.从而满足条件的分配方案数为 $k!\ S_2(n,k,r)$,即证(4).

由(1)式有

$$k!\ S_2(n,k,r)=\binom{n-1}{r-1}k!\ S_2(n-r,k-1,r)+kk!\ S_2(n-1,k,r)$$

从而由(4)式有:

推论2.1

$$q(n,k,r)=k\binom{n-1}{r-1}q(n-r,k-1,r)+kq(n-1,k,r) \tag{5}$$

当 $r=1$ 时有,$q(n,k)=kq(n-1,k-1)+kq(n-1,k)$[3]

这里 $q(n,k)=q(n,k,1)$.

同理,由(3)式,我们有:

推论2.2

$$q(n,k,r)=k\sum_{m=0}^{n-r}\binom{n-1}{m}q(n,k-1,r)$$

参考文献:

[1] 柯 召,魏万迪.组合论(上册)[M].北京:科学出版社,1984.56-74,223-238.

[2] 胡端平,鲁晓成.组合数学[M].武汉:武汉大学出版社,2001.49-53.

[3] 曹汝成.组合数学习题解答[M].广州:华南理工大学出版社,2005.74-78.

[4] Brualdi R A. Introductory Combinatorics [M]. Prentice Hall,1999.271-288.

[5] 曹汝成.广义容斥原理及其应用[J].数学研究与评论,1988,(4):526-530.

The concept and property of general Stirling numbers of second kind

HU Duan-ping

(School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan, 430074,China)

Abstract: The Stirling numbers of second kind is obtained by multiplying case and it has many applications. In the paper, we obtain the general Stirling numbers of second kind by the number of cut methods of a limited set, and then Stirling number of second kind becomes its solid example. And also we give the certification of the basic property of general Stirling numbers of second kind. Finally, we discuss the count of distribution problem by using general Stirling numbers of second kind.

Key words: the general Stirling numbers of second kind; classification; distribution

本文编辑:萧 宁