文章编号:1004-4736(2008)01-0122-03

单纯形法中确定主元素的两个新法则

罗 进,张志军,刘任河
(武汉工程大学理学院,湖北 武汉 430074)

摘 要:给出了单纯形法中确定主元素的两个新法则,即"按使目标函数值增加得最多的原则确定主元素"和"按使目标函数值增加得最快的原则确定主元素",并以实例说明了应用这两个法则来确定主元素较应用"最大σ法则"来确定主元素,具有迭代次数更少、收敛速度更快的特点.

关键词:单纯形法;目标函数值;主元素
中图分类号:O 221.1 文献标识码:A

0 引 言

单纯形法中确定主元素的最好策略是什么?这个问题迄今尚未完全解决[1]. 确定主元素是单纯形法求解过程中的一个重要环节,因为主元素选择的好坏直接影响到收敛速度与迭代次数. 经典的做法是按照"最大σ法则"[2],并结合"θ法则"[2]来确定主元素,这种做法的明显缺陷是,不能保证迭代次数尽量少和收敛速度尽量快. 文献[3]中提出的算法不失为解决这一问题的一个较好的方案. 如果按使目标函数值增加得最多的原则来确定主元素或按使目标函数值增加得最快的原则来确定主元素,则可以在一定程度上克服这种缺陷,从而提高单纯形法的效率.

1 使目标函数值增加得最多的原则

设线性规划问题经过k步迭代后的单纯形表如表1.

表1 经k步迭代后的单纯形表

Table 1 Simplex table after iteration step of k

	c_j		c_1	…	c_i	…	c_m	…	c_j	…	c_n
C_B	基	β	x_1	…	x_i	…	x_m	…	x_j	…	x_n
c_1	x_1	β_1	1					…	α_{1j}	…	α_{1n}
⋮	⋮	⋮		⋱					⋮		⋮
c_i	x_i	β_i			1				α_{ij}	…	α_{in}
⋮	⋮	⋮				⋱			⋮		⋮
c_m	x_m	β_m					1	…	α_{mj}	…	α_{mn}
	σ_j		0	…	0	…	0	…	σ_j	…	σ_n

若某个检验数$\sigma_j>0$,且至少有一个$\alpha_{sj}>0$时,令

$$\theta_j=\min_s\left\{\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}}\mid\alpha_{sj}>0\right\}=\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$$

则

$$\overline{x}_{k+1}=\overline{x}_k+\theta_j d_j.$$

其中$\overline{x}_k$表示迭代k次后的基本可行解,$\overline{x}_{k+1}$表示迭代$k+1$次后的基本可行解,$d_j=(-\alpha_{1j},-\alpha_{2j},\cdots,-\alpha_{mj},0,\cdots,1,0,\cdots,0)^T$(1是第$j$个分量)是第$k+1$步迭代的迭代方向.

$\overline{x}_{k+1}$处的目标函数值为

$$c^T\overline{x}_{k+1}=c^T(\overline{x}_k+\theta_j d_j)=c^T\overline{x}_k+c^T\theta_j d_j=c^Tx_k+\theta_j c^Td_j=c^Tx_k+\theta j\sigma_j.$$

显然$\overline{x}_{k+1}$处的目标函数值较$\overline{x}_k$处的目标函数值要大(至少不小),增量为$\theta_j\sigma_j$. 为使目标函数值增加得最多,可选取使$\theta_p\sigma_p$达到最大的p作为主元素的列标,即$\theta_p\sigma_p=\max\limits_j\{\theta_j\sigma_j\mid\sigma_j>0\}$. 于是有下面的定理:

定理1 在单纯形法的每次迭代中,主元素的列标p按公式(1)确定

$$\theta_p\sigma_p=\max_j\{\theta_j\sigma_j\mid\sigma_j>0\} \tag{1}$$

可使目标函数值增加得最多.

2 使目标函数值增加得最快的原则

按照定理1确定主元素虽然使目标函数值增加得最多,但增加的速度不一定是最快的. 下面给出另一个确定主元素的法则,按照这一原则确定主元素可使目标函数值增加得最快.

首先给出速度的定义

定义 速度就是指单位距离内目标函数值的平均增量.

第$k+1$步迭代的速度用公式表示就是

$$V_{k+1}=\frac{c^T\overline{x}_{k+1}-c^T\overline{x}_k}{\|\overline{x}_{k+1}-\overline{x}_k\|_2}$$

这里$\|\overline{x}_{k+1}-\overline{x}_k\|_2=\sqrt{\sum\limits_{j=1}^n(\overline{x}_{k+1,j}-\overline{x}_{kj})^2}$指的是相邻两点$\overline{x}_{k+1}$与$\overline{x}_k$之间的距离,其中$\overline{x}_{k+1,j}$与

收稿日期:2006-12-10
作者简介:罗 进(1969-),男,湖南株洲人,硕士,讲师.研究方向:最优化算法研究.

$\overline{x}_{kj}(j=1,2,\cdots,n)$ 分别指 $\overline{x}_{k+1}$ 与 $\overline{x}_k$ 的第 j 个分量.

由第 1 节的讨论可得

$$V_{k+1}=\frac{c^T\overline{x}_{k+1}-c^T\overline{x}_k}{\|\overline{x}_{k+1}-\overline{x}_k\|_2}=\frac{\theta_j\sigma_j}{\|\theta_j d_j\|_2}=$$

$$\frac{\sigma_j}{\|d_j\|_2}=\frac{\sigma_j}{\sqrt{1+\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{ij}^2}}.$$

显然要使 V_{k+1} 最大,主元素的列标 p 应满足如下条件

$$\frac{\sigma_p}{\sqrt{1+\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{ip}^2}}=\max_j\left\{\frac{\sigma_j}{\sqrt{1+\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{ij}^2}}\middle|\sigma_j>0\right\}.$$

于是得到定理 2.

定理 2　在单纯形法的每次迭代中,主元素的列标 p 按照公式(2) 确定

$$\frac{\sigma_p}{\sqrt{1+\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{ip}^2}}=\max_j\left\{\frac{\sigma_j}{\sqrt{1+\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{ij}^2}}\middle|\sigma_j>0\right\},\tag{2}$$

可使目标函数值增加得最快.

3　实例分析

例　求解线性规划问题

$$\max Z=9x_1+8x_2+40x_3+19x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+2x_2+10x_3+4x_4\leqslant 18,\\ 2x_3+\dfrac{1}{2}x_4\leqslant 3,\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0.\end{cases}$$

加入松弛变量 x_5,x_6,化问题为标准形

$$\max Z=9x_1+8x_2+40x_3+19x_4+0x_5+0x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+2x_2+10x_3+4x_4+x_5=18,\\ 2x_3+\dfrac{1}{2}x_4+x_6=3,\\ x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,6).\end{cases}$$

下面分别用三种确定主元素的方法来求解这个问题.

方法一　按"最大 σ 法则",并结合"θ 法则"确定主元素进行迭代(求解过程见表 2 ~ 6).

表 2　初始单纯形表

Table 2　Initial simplex table

	c_j		9	8	40	19	0	0
C_B	基	β	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_5	18	3	2	10	4	1	0
0	x_6	3	0	0	[2]	$\frac{1}{2}$	0	1
	σ_j		9	8	40	19	0	0

表 3　经 1 步迭代后的单纯形表

Table 3　Simplex table after iteration step of 1

	c_j		9	8	40	19	0	0
C_B	基	β	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_5	3	[3]	2	0	$\frac{3}{2}$	1	-5
40	x_3	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
	σ_j		9	8	0	9	0	-20

表 4　经 2 步迭代后的单纯形表

Table 4　Simplex table after iteration step of 2

	c_j		9	8	40	19	0	0
C_B	基	β	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
9	x_1	1	1	$\frac{2}{3}$	0	$[\frac{1}{2}]$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
40	x_3	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
	σ_j		0	2	0	$\frac{9}{2}$	-3	-5

表 5　经 3 步迭代后的单纯形表

Table 5　Simplex table after iteration step of 3

	c_j		9	8	40	19	0	0
C_B	基	β	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
19	x_4	2	2	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
40	x_3	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$[\frac{4}{3}]$
	σ_j		-9	-4	0	0	-6	10

表 6　经 4 步迭代后的单纯形表

Table 6　Simplex table after iteration step of 4

	c_j		9	8	40	19	0	0
C_B	基	β	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
19	x_4	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0
0	x_6	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$	1
	σ_j		$-\frac{21}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{2}$	0	$-\frac{19}{4}$	0

从表 6 可得标准形的最优解为

$$X^*=\left(0,0,0,\frac{9}{2},0,\frac{3}{4}\right)^T.$$

方法二　利用定理 1 确定主元素进行迭代. 在初始单纯形表(表 2) 中,

$\sigma_1\theta_1=9\times 6=54,\sigma_2\theta_2=8\times 9=72,\sigma_3\theta_3=40\times\frac{3}{2}=60,\sigma_4\theta_4=19\times\frac{9}{2}=\frac{171}{2}.$

因 $\sigma_4\theta_4$ 最大,利用定理 1,取 $a_{14}=4$ 为主元素. 经 1 次迭代后即得表 6.

方法三　利用定理 2 确定主元素进行迭代. 在初始单纯形表(表 2) 中,

$$\frac{\sigma_1}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{2}\alpha_{i1}^2}}=\frac{9}{\sqrt{1+3^2}}=\sqrt{\frac{81}{10}},$$

$$\frac{\sigma_2}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{2}\alpha_{i2}^2}}=\frac{8}{\sqrt{1+2^2}}=\sqrt{\frac{64}{5}},$$

$$\frac{\sigma_3}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{2}\alpha_{i3}^2}}=\frac{40}{\sqrt{1+10^2+2^2}}=\sqrt{\frac{1600}{105}},$$

$$\frac{\sigma_4}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{2}\alpha_{i4}^2}}=\frac{19}{\sqrt{1+4^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\sqrt{\frac{1444}{69}}.$$

因 $\frac{\sigma_4}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{2}\alpha_{i4}^2}}=\sqrt{\frac{1444}{69}}$ 最大，利用定理 2，选取第 4 列为主列，再利用 θ 法则确定 $a_{14}=4$ 为主元素. 经 1 次迭代后即得表 6.

按方法一求解共需进行 4 次迭代，而按方法二、三求解仅需进行 1 次迭代即可求得最优解.

4 结 语

从上面这个简单的例子可以看出，按使目标函数值增加得最多的原则来确定主元素或按使目标函数值增加得最快的原则来确定主元素，较应用“最大 σ 法则”来确定主元素，具有迭代次数更少、收敛速度更快的特点.

参考文献：

[1] 刁在筠，郑汉鼎，刘家壮，等. 运筹学(第二版)[M]. 北京：高等教育出版社，2003. 28-29.

[2] 胡运权，郭耀煌. 运筹学教程[M]. 北京：清华大学出版社，2002. 23.

[3] 唐建国. 线性规划的目标函数最速递减算法[J]. 运筹与管理，2005，14(4)：55-59.

Two rules of determining the principal element in simplex method

LUO Jin, ZHANG Zhi-jun, LIU Ren-he

(School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: This paper gives two rules of determining the principal element in simplex method, i. e., by maximal value or rapidest way of the increasing of the objective function. An example is given to confirm that it needs less iteration degree, and gets more rate of convergence in determining the principal element comparing with the maximal σ rule.

Key words: simplex method; value of the objective function; principal element

本文编辑：萧 宁

☆

(上接第 119 页)

Linear fitting and computer processing on experiment data

HE Ju-ming, WANG Fu

(School of Sciences, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: In this paper, a linear fitting method of data processing is introduced. Algorithm and C language computer programs of simple linear fitting are given. Then, fitting method in complicated circumstance is also simply analysed.

Key words: data processing; linear fitting; computer application

本文编辑：萧 宁