第 30 卷第 1 期　　武　汉　工　程　大　学　学　报　　Vol. 30　No. 1
2008 年 01 月　　J. Wuhan Inst. Tech.　　Jan.　2008

文章编号:1004－4736(2008)01－0125－02

基于排队的服务系统的最小成本

孙霞林,曾　华,熊德之,杨建华
(武汉工程大学理学院,湖北 武汉 430074)

摘　要:用排队论的方法对基于排队的服务系统进行分析,确定了服务系统的排队模型. 给出了统计平衡条件的排队系统的主要指标. 讨论了该排队系统的最优化,并进行了实例分析.

关键词:最小成本;排队论;最优化
中图分类号:O 141;O 142　　文献标识码:A

服务系统在市场中的竞争力更多的体现在服务总成本和服务时间的长短上. 于是,在服务过程中,降低服务成本为大多服务单位越来越重视的一个环节[1]. 随着市场经济的发展与完美,降低服务成本是降低总成本、获取利润、提升服务机构竞争力的重要手段[2]. 本文主要考虑的是服务系统中的成本问题. 在综合考虑各种成本问题的基础上,优化服务系统的成本,使得总成本为最小.

1　假设及说明

假设不同顾客先后随机到达服务机构处.

a. 输入过程:据观察,被服务的顾客的到达流基本满足平稳性、无后效性及普通性,因而假设商品输入流为 Poisson 流[2],单个到达,来源无限.

b. 排队规则:等待制. 先到者先服务,系统容量有限,但通常几乎不发生顾客数到达限额的现象,因此认为容量近似无限.

c. 服务机构:顾客单个接受服务. 现以 m 表示服务系统服务台数目,服务台的服务时间具有无记忆性,即服从负指数分布[3],且每个服务台的服务时间独立.

2　排队模型及主要指标

2.1　排队模型分析

如果顾客到达时系统中无其它顾客,则到达者马上接受服务,如果系统中已经有顾客正在接受服务,则到达者排队等候,顾客接受完服务后马上离开. 该排队系统是一个单排队多通道服务的排队系统. 顾客的输入流是 Poisson 流,服务台的服务时间均服从负指数分布[4]. 则排队模型如图 1.

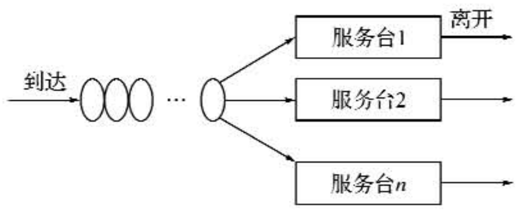

图 1　服务系统排队模型图

Fig. 1　The diagram of queue model of service system

服务台处一般不同,服务台不加区别,此排队系统模型为 $M/M/m/\infty$[5].

2.2　排队模型的主要指标

该排队系统是状态有限的生死过程,平稳解存在. 设顾客 Poisson 流到达的参数为 λ,服务率为 μ,则有:

系统的服务强度:$\rho=\dfrac{\lambda}{m\mu}$.

系统空闲的概率:

$$p_0=\left[\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{m!\left(1-\frac{\lambda}{m\mu}\right)}\right]^{-1}.$$

队列中平均顾客数:

$$L_q=\frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{(m-1)!\ (m\mu-\lambda)^2}p_0.$$

到达者未获得即时服务的平均等候时间:

$$W_a=\frac{1}{m\mu-\lambda}.$$

顾客在队列中平均等候时间:$W_q=L_q/\lambda$.

到达者必须等候服务的概率:$p_q=W_q/W_a$.

3　最优化问题

服务系统的设计常常考虑平衡服务成本与系统中的期望顾客等候成本. 顾客的等候成本指因顾客等候而发生的成本. 根据通道数可以确定,最

收稿日期:2006－08－31
作者简介:孙霞林(1956－),男,湖北鄂州人,副教授. 研究方向:应用数学.

佳服务能力是使顾客等候成本与服务能力成本之和最小的服务能力.则总成本为:总成本=顾客等候成本+服务能力成本.

进行综合考察,求出最佳的服务台数.

若服务水平固定,则排队损失费是服务台数的减少函数,服务费是服务台数的增函数.当总费用的最小值存在时,对应的服务台数目即为最优服务台数.

对于系统 $M/M/m/\infty$,设每位顾客在系统中逗留单位时间损失费用为 C_1 元,服务系统单位时间服务费为元,则单位时间平均总费用为[4]:

$$F=C_1\overline{N}(m)+C_2 m\mu,\ m\geqslant 1$$

用边际分析法,求解最优的 m^*,使

$$\begin{cases}F(m^*)\leqslant F(m^*+1)\\ F(m^*)\leqslant F(m^*-1).\end{cases}$$

即 m^* 必须满足 $\overline{N}(m^*)-\overline{N}(m^*-1)\leqslant\frac{C_2\mu}{C_1}\leqslant\overline{N}(m^*-1)-\overline{N}(m^*)$.

对 $n=1,2,3,\cdots$,计算相邻二值之差 $\overline{N}(m)-\overline{N}(m+1)$.若 $\frac{C_2\mu}{C_1}$ 落在某区间

$$[\overline{N}(m^*)-\overline{N}(m^*-1),\overline{N}(m^*-1)-\overline{N}(m^*)]$$

内,则对应 m^* 的即为最佳的服务台数.

4 实例分析

考查某卸货公司得知,上班时间卡车到达库房的速度是每小时15辆,职工的卸货速度是每小时5辆卡车.最近的工资变化引发了库房管理者对使用多少职工问题重新思考.新工资制度是:职工与卡车的停靠成本为每小时100元,卡车和司机的成本是每小时120元.

这里 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{15}{5}=3$.令 $L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu}$,

可得系统的总成本 $F=100\ m+120\ L_s$,计算指标如表1.

表1 排队系统基本指标

Table 1 The basic index of queue system

职工规模(人)	系统中的平均卡车数	系统中没有卡车的概率 p_0
4	1.525	0.038
5	0.335	0.047
6	0.099	0.049
7	0.028	0.050

由表1即可算出系统总成本,如表2.

表2 排队系统成本

Table 2 The cost of queue system

职工规模	职工成本	停靠成本	系统总成本
4	400	543.36	943.36
5	500	402.48	902.48
6	600	371.88	971.08
7	700	363.36	1 063.36

由结果看出,该卸货公司有5名卸货工人时可使得系统总成本最低,为最优解.

5 结 语

本文用排队论的方法分析了某些服务系统,结合具体服务情况估计总费用的思想,设定适当数目服务台,降低系统服务总成本,适应了新经济时代的个性化服务趋势.了解运用这些对于降低系统服务总成本和提高服务业整体竞争具有很强的现实意义.

参考文献:

[1] 彭勇行.管理决策分析[M].北京:科学出版社,2000.43-65.

[2] 廖业红.运筹学排队论在客户服务中的应用与辅助决策[J].商场现代化,2006,(32):1-292.

[3] 浙江大学.概率论下数理统计[M].第三版.北京:高等教育出版社,2000.225-230.

[4] William J. Stevenson.生产与运作管理[M].北京:机械工业出版社,2003.498-513.

[5] 李平英.排除现象及其管理研究[J].山东农业大学学报,2003,(02):40-42.

The minimum cost of service system based on queue

SUN Xia-lin, ZENG Hua, XIONG De-zhi, YANG Jiang-hua

(School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: The article gives the queue model of service system based on the analysis of queue service system with the method of queue. It also determines the main parameters of queue in balance conditions. The optimization of cost of service system is also discussed. Several practical applications are discussed with the method.

Key words: minimum cost; queue theory; optimization

本文编辑:萧 宁