文章编号:1674-2869(2008)03-0122-02

一种奇异积分方程的解法

戴济能,李圆媛

(武汉工程大学理学院,湖北 武汉 430074)

摘　要:研究了一种非线性奇异积分方程的解法,其基本方法是通过某种变换把它转化为带平方根的 Riemann 边值问题,从而给出了积分方程的可解条件及解的表达式.

关键词:奇异积分方程;Riemann 边值问题;Plemelj 公式

中图分类号:O 175.5　　　文献标识码:A

0　引　言

在文献[1]中,路见可讨论了下列封闭曲线情况下的非线性奇异积分方程:

$$A\varphi(t)^2+\frac{B}{\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+C=0, t\in L \qquad (1)$$

其中未知函数 $\varphi(t)\in H(L)$,L 是一条光滑的封闭曲线,而 A,B,C 为已知常数($A,B\neq0$).本文在文献[1]的基础上,进一步讨论了在 L 为一条光滑开口弧段$\overset{\frown}{ab}$情况下方程(1)的一般求解方法,此时要求 $\varphi(t)$ 在开口弧段的端点 a,b 处有不到 1 阶的奇异性.由于在 L 为开口弧段的条件下 Cauchy 主值积分的反演公式不再成立,所以方程不能直接通过文献[1]中所使用的方法求解.这里笔者采用了一种更为简洁的初等方法将非线性奇异积分方程的求解转化一个带平方根的边值问题,而且对于 L 为光滑封闭曲线的情况下其方法同样适用.

1　转化为带平方根的 *Riemann* 边值问题

假设(1)有解 $\varphi(t)\in H(L)$,令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau \qquad z\notin L \qquad (2)$$

利用 Plemelj 公式,(1)就转化为

$$[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)]^2+\frac{B}{A}[\Phi^+(t)+\Phi^-(t)]+\frac{C}{A}=0 \qquad (3)$$

显然,如果方程(1)有一解 $\varphi(t)\in H$ 则由(2)定义的全纯函数 $\Phi(z)$ 是 Riemann 边值问题(3)在 R_{-1} 中的一个解.

反之,如果边值问题(3)在 R_{-1} 中有一个解 $\Phi(z)$,则

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t) \qquad (4)$$

便是方程(1)的一个解.这样,方程(1)的求解问题就等价于在 R_{-1} 中求解问题(3).

现在将问题(3)转化为一个带平方根的 Riemann 边值问题.

令 $D=\sqrt{-\frac{B}{2A}}$(D 为 $-\frac{B}{2A}$ 一确定的平方根),$E=\frac{4AC-B^2}{8AB}$,于是(3)变为

$$[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)]^2-2D^2[\Phi^+(t)+\Phi^-(t)]+D^4-4ED^2=0$$

即 $[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)-D^2]^2=4D^2[\Phi^-(t)+E]$

所以 $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)-D^2=2D\sqrt{\Phi^-(t)+E}$.

因为要求 $\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$ 在 L 上连续且单值,故 $\sqrt{\Phi^-(t)+E}$ 也是如此,只要在 L 上取定一单值分支,也即

$$\Phi^+(t)+E=(\sqrt{\Phi^-(t)+E}+D)^2$$

根据同样的理由,上面方程可化为

$$\sqrt{\Phi^+(t)+E}=\sqrt{\Phi^-(t)+E}+D$$

引进函数　$\Psi(z)=\Phi(z)+E$ (5)

则问题(3)转化为

$$\sqrt{\Psi^+(t)}=\sqrt{\Psi^-(t)}+D \qquad (6)$$

这是一个典型的在文献[2]中讨论过的带平方根的 Riemann 边值问题,它与 E 的取值有关.当 $E\neq0$ 时,要求其解在 $z=\infty$ 处恰为 0 阶,且 $\Psi(\infty)=E$;而当 $E=0$ 时,在 $z=\infty$ 处至多为 -1 阶,即 $\Psi(\infty)=0$.

2　方程(1)的求解

根据上面的分析,只须求出(6)的解,然后通过(5),(4)就可求出方程(1)的解.而由文献[2]中

收稿日期:2007-11-23

作者简介:戴济能(1980-),男,湖北黄冈人,博士研究生.研究方向:复分析.

的结果知，须考虑以下情况.

（Ⅰ）$E\neq 0$，(6)将在 R_0 中求解，即 $\Psi(z)$ 在无穷远处有偶数阶 $K=0$ 的情况. 设 $\Psi(z)$ 在 L 所剖开的区域里有 N（N 为非负整数）个具有奇数阶数的零点 $c_1,\cdots,c_N$，这里 $c_1,\cdots,c_N$ 及 N 是可以任意选取的.

此时又分以下子情况：

（ⅰ）若 N 为偶数，即 $N=2m$

a. $m=0$，则(6)的解为

$$\sqrt{\Psi(z)}=\frac{D}{2\pi i}\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-z}\pm\sqrt{E}$$

于是，由于 $\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\Psi^+(t)-\Psi^-(t)$，立即得到(1)的解

$$\varphi(t)=\pm 2D\sqrt{E}+\frac{D^2}{\pi i}\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}$$

b. $m=1$，记 $\prod(z)=(z-c_1)\cdots(z-c_N)$，(6)有解

$$\sqrt{\Psi(z)}=\sqrt{\prod(z)}\,\frac{D}{2\pi i}\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\prod(\tau)}(\tau-z)}$$

当且仅当满足条件

$$\frac{D}{2\pi i}\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\prod(\tau)}}=\sqrt{E}\text{ 或 }-\sqrt{E}$$

此时 $\varphi(t)=\dfrac{D^2\sqrt{\prod(t)}}{\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\prod(\tau)}(\tau-t)}$

c. $m>1$，只要下列可解条件

$$\int_L\frac{\tau^j\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\prod(\tau)}}=0,\ j=0,\cdots,m-2,$$

$$\frac{D}{2\pi i}\int_L\frac{\tau^{m-1}\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\prod(\tau)}}=\sqrt{E}\text{ 或 }-\sqrt{E}$$

都满足时，(6)有解

$$\sqrt{\Psi(z)}=\sqrt{\prod(z)}\,\frac{D}{2\pi i}\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\prod(\tau)}(\tau-z)}$$

因此便得 $\varphi(t)=\dfrac{D^2\sqrt{\prod(t)}}{\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\prod(\tau)}(\tau-t)}$

（ⅱ）若 N 为奇数，即 $N=2m-1$.（此时由于解的情况较复杂，这里仅给出其中的部分解，其完整解可参看文献[2]）.

a. $m=1$，设 $c\in L/\{a,b\}$，记 $\prod_1(z)=(z-c)\prod(z)=(z-c)(z-c_1)\cdots(z-c_N)$

当条件 $\dfrac{D}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\prod_1(\tau)}}=\sqrt{E}$ 或 $-\sqrt{E}$

满足时，(6)有解

$$\sqrt{\Psi(z)}=\sqrt{\prod_1(z)}\,\frac{D}{2\pi i}\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\prod_1(\tau)}(\tau-z)}$$

此时 $\varphi(t)=\dfrac{D^2\sqrt{\prod_1(t)}}{\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\prod_1(\tau)}(\tau-t)}$

b. $m>1$，条件 $\displaystyle\int_L\frac{\tau^j\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\prod_1(\tau)}}=0\quad j=0,\cdots,m-2$，

及 $\dfrac{D}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\tau^{m-1}\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\prod_1(\tau)}}=\sqrt{E}$ 或 $-\sqrt{E}$

都满足时，(6)有解

$$\sqrt{\Psi(z)}=\sqrt{\prod_1(z)}\,\frac{D}{2\pi i}\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\prod_1(\tau)}(\tau-z)}$$

这时 $\varphi(t)=\dfrac{D^2\sqrt{\prod_1(t)}}{\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\prod_1(\tau)}(\tau-t)}$

（Ⅱ）$E=0$，这时(6)应该在 R_1 中求解，即 $\Psi(z)$ 在无穷远处应有奇数阶 $K=-1$ 或者有偶数阶（至多为）$K=-2$，此时解的情讨论类似于（Ⅰ），为了篇幅的需要将其省略.

参考文献：

[1] 路见可. 一种非线性积分方程解法[J]. 数学年刊，2002，23A(5)：619-624.

[2] Chen Jin-song, Lu jian-ke. Riemann boundary value problem with square roots on an open arc[J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences，2007，12(2)：193-197.

[3] Lu Jian-ke. On solution of a kind of Riemann boundary value problem with square roots[J]. Acta Math Sci，2002，22B(2)：145-149.

[4] Lu Jian-ke. Boundary value problems for analytic functions[M]. Singapore：World Scientific，2002.

（下转第 126 页）

5597，可得到被保险人的索赔临界值

$$x_0=\begin{cases}-4.5d\,\dfrac{22+9d}{81d-200},d<0.5597\\ -\dfrac{119}{81}+\dfrac{2}{81}\sqrt{1900+7290d},d\geqslant 0.5597\end{cases}$$

$$x_1=x_2=\begin{cases}-4.5d\,\dfrac{222+90d}{81d-200},0\leqslant d<0.5597\\ 1,d\geqslant 0.5597\end{cases}$$

而相应的保险人选择的保费价格为

$$\pi=$$

$$\begin{cases}5.0625\times 10^{-2}\dfrac{6561d^4+66240d^2+64000d+1.6\times 10^5}{(81d-200)^2},\\ d<0.5597\\ 0.0225\Big(\dfrac{-1.0425\times 10^{10}+3.2648\times 10^8\sqrt{1900+7290d}}{1+5\times 10^7\sqrt{1900+7290d}}+\\ \dfrac{4\times 10^{10}d+2\times 10^9 d\sqrt{1900+7290d}}{1+5\times 10^7\sqrt{1900+7290d}}\Big),d\geqslant 0.5597\end{cases}$$

4 结　语

本文从“NCD”系统中保险双方围绕着各自未来开支的最优化博弈互动方面进行分析，得到了双方的最优决策结果，即保险人根据被保人对自身损失值的反应选择一个合适的最优临界损失值而给出一个最佳的保费价格及“NCD”折扣，使双方的保险成本达到最优.

参考文献：

[1] Lemaire J. A comparative analysis of most European and Japanese bonus-malus Systems[J]. Journal of Risk and Insurance, 1988, 56: 660-681.

[2] Verrall R. No Claims Discount Systems(A2, Unit16)[M]. London and Edinburgh: Fundamentals of Actuarial Mathematics, Institute and Faculty of Actuarics, 1995: 316-325.

[3] Goovaerts M, deVylder F, Haezendonck J. Insurance Premiums[M]. Netherlands: North-Holl, 1984: 469-472.

[4] De Pril N. Optimal claim decisions for a bonus-malus systems: a contiuous Approach[J]. Astin Bulletin, 1979, 10(2): 215-222.

The optimal game between the insurer and the insured in NCD systems

LIU Ren-he*, *GUO Guan-yao

(School of Science, Wuhan Institue of Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: According to the Markov decision process, the optimal game behavior results between the insurer and the insured was obtained in NCD systems, i. e. for the in sured, the optimal threshold damage values was decided, while for the insurer, it's optimal premium and discount values was decided too.

Key words: “NCD” systems; Markov decision process; threshold damage values; optimal premium; optimal discount values

本文编辑：萧　宁

☆

（上接第 123 页）

The solution of a kind of singular integral equations

DAI Ji-neng*, *LI Yuan-yuan

(School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: The solution for a kind of singular integral equations is considered in the paper. By transferring the solving of equations to boundary value problems with square roots, the general solutions and the conditions of its solvability are obtained.

Key words: singular integral equation; Riemann boundary value problem; Plemelj formula

本文编辑：萧　宁