文章编号:1674－2869(2008)03－0124－03

"NCD"系统中保险双方的最优博弈

刘任河,郭光耀

(武汉工程大学 理学院,湖北 武汉 430074)

摘　要:在"NCD"系统中,利用 Markov 决策过程,获得了投保双方博弈行为的最优结果. 对被保险人来说,确定了其最优临界损失值,对保险人来说,确定了最优保费与折扣值.

关键词:"NCD"系统;Markov 决策过程;临界损失值;最优保费;最优折扣

中图分类号:O 211.62　　文献标识码:A

0　引　言

在欧美机动车辆保险市场,"NCD"系统(即 No Claims Discount Systems 称为"无索赔折扣系统")被广泛应用与深入研究已有很长一段时间. 最为突出的"NCD"系统研究专家是 Lemaire,Borch,Verrall,Goovaerts 等人. 其中 Lemaire[1] 详细描述并比较分析了欧洲与日本等国的"NCD"系统. Verrall[2] 对"NCD"系统做了分类,并研究了"NCD"系统中折扣水平、折扣兑付的时间要求,甚至还讨论了近似临界值的确定方法. 而 Goovaerts[3] 深入研究了最优临界值的限,并利用后向诱导法得到了这一临界值. De Pril[4] 考虑被保险人损失遵循 Poisson 过程时得到了临界值的演化过程,在构造合适的边界条件下,他用一个微分方程描述了该系统.

对机动车辆保险双方来说,被保险人保持无索赔记录的时间越长,对保险人而言,表明该客户的风险水平越低,但并不表示被保险人在保险期内无保险事故发生,可能无保险事故发生,也可能发生的损失额在被保人看来,自身可以承受,或者是其损失额低于索赔费用及赔额而自愿放弃索赔. 对保险人而言,对这样的客户提供一定的保费折扣作为奖励,将不只是笼络并锁定客户的一种营销策略,更深层的意义是对客户风险的一种公平、公正的评价. 但仔细看来,其中却包含如下一些问题:对保险人来说,他必须厘定一个合适的保费价格并提供一定的折扣以使被保险人接受,同时最大化其未来期望收益;对被保险人而言,面对保险人提供的保费与折扣,他必须确定其损失额为多少时才提出索赔,以使其保险成本达到最小(此时被保险人的损失额称为最优临界损失值). 针对这些问题,本文利用 Markov 决策过程就投保双方的行为进行博弈分析,并确定这样三个量:保险人提供的最优保费价格与折扣值,被保险人的最优临界损失值.

1　假设与定义

假设保险期限为 n 年,被保险人因保险事故所发生的年损失额为独立同分布的随机变量,记作 X,它所服从的分布函数记为 F,年损失额的期望值记为 μ.

假设保险人规定,被保险人须在 k 年内保持无索赔记录方可享受"NCD"折扣,该折扣值记为 d,年保费记为 π. 其他相关定义如下.

a. 年折扣因子 δ,$\delta=\dfrac{1}{1+r}$为年返还率;

b. 被保险人在无索赔的 i 年中未来开支的期望现值 A_i,$i=0,\cdots,k$;

c. 保险人在无索赔发生的 i 年中其资金流的期望现值 B_i,$i=0,\cdots,k$;

d. 被保险人在 i 年中无索赔要求时的年损失临界值 x_i,$i=0,\cdots,k$. 注意:x_i 表示被保险人在第 i 年的年累积损失额未达到 x_i 时不提出索赔,若一旦超出 x_i 则要求索赔,故 x_i 为一临界值.

假设 $x_0,x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n$ 为独立同分布随机变量序列,并具有无记忆性,构成 Markov 链.

2　保险双方的博弈

2.1　被保险人的最优临界损失值

由上述定义知,临界损失水平是被保险人的年损失额介于其将要要求索赔与放弃索赔之间的一个值. 为确定该值,下面建立被保险人在其年损失达到某值并要提出索赔时的未来开支的期望现值与将要放弃索赔时的未来开支的期望现值之间

收稿日期:2007－03－27

作者简介:刘任河(1970－),湖南隆回人,硕士,讲师. 研究方向:风险分析与精算学.

的一个等式，通过求解该等式，即可确定临界损失水平.

记 $EPV(x)_{i,1}$ 为被保险人在第 i 年中当年损失额为 x 并放弃索赔时的未来开支的期望现值；记 $EPV(x)_{i,2}$ 为被保险人在第 i 年中当年损失额为 x 并提出索赔时的未来开支的期望现值.

a. 若 $i=k$，则

$$\left.\begin{aligned}EPV(x)_{i,1}&=x+A_k\\ EPV(x)_{i,2}&=A_0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_k=A_0-A_k$$

b. 若 $0\leqslant i<k$，则

$$\left.\begin{aligned}EPV(x)_{i,1}&=x+A_{i+1}\\ EPV(x)_{i,2}&=A_0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_i=A_0-A_{i+1}\Rightarrow$$

$$x_{k-1}=A_0-A_k$$

所以 $x_k=x_{k-1}$.

令 $G(x)=\int_0^x y\mathrm{d}F(y)$ 被保险人的临界损失为 x 时的期望值，则

$$A_k=\pi-d+\delta A_0-\delta(A_0-A_k)F(x_k)+\delta G(x_k)$$

a. 当 $0\leqslant i<k$ 时

$$A_i=\pi+\delta A_0-\delta(A_0-A_{i+1})F(x_i)+\delta G(x_i)$$

令 $H(x)=xF(x)-G(x)$，则

$$x_{k-1}=A_0-A_k=(1-\delta)A_0-\pi+d+\delta H(x_{k-1})$$

b. 当 $0\leqslant i<k-1$ 时

$$x_i=A_0-A_{i+1}=(1-\delta)A_0-\pi+\delta H(x_{i+1})$$

且 $A_0=\pi+\delta A_0-\delta H(x_0)$，故

$$x_{k-1}=d+\delta[H(x_{k-1})-H(x_0)]$$

$$x_i=\delta[H(x_{i+1})-H(x_0)]$$

$$A_0=\frac{\pi-\delta H(x_0)}{1-\delta}$$

2.2　保险人的现金流的期望现值

首先，在被保险人于前 $i(i<k-1)$ 年不要求索赔时保险人的现金流的期望现值 B_i 的递推关系为

$$B_i=\pi-\delta\int_{x_i}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x+\delta F(x_i)B_{i+1}+\delta\overline{F(x_i)}B_0$$

其中 $\overline{F(x_i)}=1-F(x_i)$

其次，在被保险人于前 $k-1$ 年不要求索赔时保险人的现金流的期望现值 B_{k-1} 的递推关系为

$$B_{k-1}=\pi-\delta\int_{x_k}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x+\delta F(x_k)B_k+\delta\overline{F(x_k)}B_0$$

最后，在被保险人于 k 年内不要求索赔时保险人的现金流的期望现值为

$$B_k=\pi-d-\delta\int_{x_k}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x+\delta F(x_k)B_k+\delta\overline{F(x_k)}B_0$$

2.3　保费与"NCD"折扣间的博弈均衡

定义 V_0 为 $\pi,d,x_0,\cdots,x_k$ 的函数，即 $V_0(\pi,d,x_0,\cdots,x_k)$，则在保险人给定的"NCD"折扣 d 条件下，被保险人选择索赔临界值 $x_0,\cdots,x_k$ 即可最小化其保险成本.

由于在任何时刻，保险双方都必须承担未来所有的支出，故

$$B_i-A_i=-(\delta\mu+\delta^2\mu+\cdots)=-\frac{\delta\mu}{1-\delta},i=0,1,\cdots,k$$

从而被保险人的保险成本为

$$A_0=B_0+\frac{\delta\mu}{1-\delta}$$

由于上述索赔临界值也将最小化保险人的现金流的期望现值，故

$$(x_0,\cdots,x_k\mid(d))=\mathop{\mathrm{Argmin}}_{x_0,\cdots,x_k}V_0\mid(d)$$

而保险人要在被保险人选择索赔临界值 $x_0,\cdots,x_k$ 的条件下最大化其现金流的期望现值，则必须选择合适的保费 π 与"NCD"折扣 d，即

$$(\pi,d)=\mathop{\mathrm{Arg\,max}}_{\pi,d}V_0$$

$$(\pi,d)=\mathop{\mathrm{Argmin}}_{\pi,d}V_0$$

$$\text{s.t.}\ (x_0,\cdots,x_k)\in(x_0,\cdots,x_k\mid(d))=\mathop{\mathrm{Argmin}}_{x_0,\cdots,x_k}V_0\mid(d).$$

2.4　特例讨论：k=2

$k=2$ 即被保险人至少需要保持两年无索赔记录方可得到"NCD"折扣 d.

显然，由上述定义知 $V_0(\pi,d,x_0,x_1,x_2)$，由 2.1 中的分析知

$$x_1=x_0+d,x_0=\delta[H(x_0+d)-H(x_0)]$$

从而

$$V_0=B_0=A_0-\frac{\delta\mu}{1-\delta}=\frac{\pi}{1-\delta}-\frac{\delta}{1-\delta}(\mu+H(x_0))$$

令 $E_i=\dfrac{\int_{x_i}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x}{F(x_i)},i=0,1,2$ 为超出临界值 x_i 的期望索赔值，由于保险人在 $i=0$ 时的现金流的期望现值等于现金流乘以各自概率的和，故

$$V_0=\pi+F_0\delta\pi+(1-F_0)\delta(-E_0)+(1-F_0)\delta V_0+\frac{F_0F_1\delta^2(\pi-d)}{1-F_1\delta}+\frac{F_0(1-F_1)\delta^2(V_0-E_1)}{1-F_1\delta}$$

解得 V_0 为

$$V_0=\frac{\pi-\pi F_1\delta+\pi F_0\delta-\delta E_0+\delta^2E_0F_1}{1-\delta F_1-\delta+\delta^2F_1+\delta F_0-\delta^2F_0}+\frac{\delta E_0F_0-\delta^2(E_0F_0F_1-F_0F_1d-F_0E_1+E_1F_0F_1)}{1-\delta F_1-\delta+\delta^2F_1+\delta F_0-\delta^2F_0}$$

3　数值例证

假设被保险人无损失的概率为 A，而其损失发生的概率服从[0,1]上的均匀分布，则

$$F_i=A+x_i(1-A),E_i=\frac{1+x_i}{2},i=0,1,2$$

若取 $\delta=0.9,A=0.55$，分 $d<0.5597$ 与 $d\geqslant0.$

5597，可得到被保险人的索赔临界值

$$x_0=\begin{cases}-4.5d\dfrac{22+9d}{81d-200}, d<0.5597\\ -\dfrac{119}{81}+\dfrac{2}{81}\sqrt{1900+7290d}, d\geqslant 0.5597\end{cases}$$

$$x_1=x_2=\begin{cases}-4.5d\dfrac{222+90d}{81d-200}, 0\leqslant d<0.5597\\ 1, d\geqslant 0.5597\end{cases}$$

而相应的保险人选择的保费价格为

$$\pi=$$

$$\begin{cases}5.0625\times 10^{-2}\dfrac{6561d^4+66240d^2+64000d+1.6\times 10^5}{(81d-200)^2},\\ d<0.5597\\ 0.0225\left(\dfrac{-1.0425\times 10^{10}+3.2648\times 10^8\sqrt{1900+7290d}}{1+5\times 10^7\sqrt{1900+7290d}}+\right.\\ \left.\dfrac{4\times 10^{10}d+2\times 10^9 d\sqrt{1900+7290d}}{1+5\times 10^7\sqrt{1900+7290d}}\right), d\geqslant 0.5597\end{cases}$$

4 结 语

本文从“NCD”系统中保险双方围绕着各自未来开支的最优化博弈互动方面进行分析，得到了双方的最优决策结果，即保险人根据被保人对自身损失值的反应选择一个合适的最优临界损失值而给出一个最佳的保费价格及“NCD”折扣，使双方的保险成本达到最优.

参考文献：

［1］ Lemaire J. A comparative analysis of most European and Japanese bonus-malus Systems［J］. Journal of Risk and Insurance，1988，56：660-681.

［2］ Verrall R. No Claims Discount Systems(A2，Unit16)［M］. London and Edinburgh：Fundamentals of Actuarial Mathematics，Institute and Faculty of Actuarics，1995：316-325.

［3］ Goovaerts M，deVylder F，Haezendonck J. Insurance Premiums［M］. Netherlands：North-Holl，1984：469-472.

［4］ De Pril N. Optimal claim decisions for a bonus-malus systems：a contiuous Approach［J］. Astin Bulletin，1979，10(2)：215-222.

The optimal game between the insurer and the insured in NCD systems

LIU Ren-he，GUO Guan-yao

(School of Science，Wuhan Institue of Technology，Wuhan 430074，China)

Abstract：According to the Markov decision process，the optimal game behavior results between the insurer and the insured was obtained in NCD systems，i. e. for the in sured，the optimal threshold damage values was decided，while for the insurer，it's optimal premium and discount values was decided too.

Key words：“NCD” systems；Markov decision process；threshold damage values；optimal premium；optimal discount values

本文编辑：萧 宁

（上接第 123 页）

The solution of a kind of singular integral equations

DAI Ji-neng，LI Yuan-yuan

(School of Science，Wuhan Institute of Technology，Wuhan 430074，China)

Abstract：The solution for a kind of singular integral equations is considered in the paper. By transferring the solving of equations to boundary value problems with square roots，the general solutions and the conditions of its solvability are obtained.

Key words：singular integral equation；Riemann boundary value problem；Plemelj formula

本文编辑：萧 宁