文章编号:1674-2869(2008)04-0112-02

# 全最小二乘法在三坐标测量中的应用

胡学军[1],王俊亮[2],王　刚[2]
(1.武汉工程大学电气信息学院,湖北 武汉 430074;2.武汉大学电子信息学院,湖北 武汉 430072)

摘　要:介绍了全最小二乘法的原理,并通过实例阐述了以点到直线距离平方和最小为条件的空间直线拟合方法,同时,比较了三坐标测量对两平面平行度全最小二乘法与最小二乘法的精度,说明这种方法适用于三坐标机测量后的计算.

关键词:全最小二乘法;空间直线;拟合
中图分类号:TH 721　　文献标识码:A

## 0　引　言

三坐标测量机作为一种三维的自动化、高精度几何量测量设备,在机械、仪器、电器、动力机械等领域得到广泛应用.而空间直线是精密测量中最基本的、也是最重要的测量对象,多年来一直有学者致力于这方面的研究.文献[1]对空间曲线测量的法向偏差进行了讨论,文献[2]对两平行面的平行度采用最小二乘法处理的误差进行了讨论.本文从误差定义出发用全最小二乘法求解,对两平面平行度进行误差分析.

全最小二乘法的思想是 Deming 于 1946 年提出,Golub(1980)用奇异值分解法讨论了全最小二乘法的求解和性质.文献[3]讨论了全最小二乘法在参数估计中的应用.

## 1　全最小二乘法原理

参数拟合一般采用最小二乘法,但是最小二乘法仅考虑因变量(通常为 $y$)方向的误差而将自变量(通常为 $x$)的误差忽略不计.下面介绍一种以测量点到被拟合对象距离平方和最小为条件的拟合方法.

全最小二乘法又被称为整体最小二乘法.

假设被拟合的直线或曲线在直角坐标系中关系为 $y=f(x)$,$x$ 为自变量,$y$ 为因变量.对 $x$、$y$ 进行 $n$ 次测量,第 $i$ 次测量值为 $(x_i,y_i)$,则:

$$\begin{cases} x_i=\hat{x}_i+\Delta x_i \\ y_i=\hat{y}_i+\Delta y_i \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\hat{x}_i$,$\hat{y}_i$ 分别为 $x$,$y$ 的真实值,$\Delta x_i$,$\Delta y_i$ 为的绝对误差.

如果 $\Delta x_i$ 相对 $\Delta y_i$ 很小且可以忽略,可以采用最小二乘法.

即:

$$\min\sum_{i 1}^{n}\Delta y_i^2 \tag{2}$$

以式(2)为条件拟合.

在实际测量中,$\Delta x_i$ 与 $\Delta y_i$ 一般相差不大,均不可以忽略.全最小二乘法以各点到被拟合对象的距离平方和最小为拟合条件拟合空间直线,

即:

$$\min\sum_{i 1}^{n}(x_i-\hat{x}_i)^2+(y_i-\hat{y}_i)^2 \tag{3}$$

## 2　全最小二乘法在空间直线拟合中的分析

在直角坐标系中对某一直线第 $i$ 次测量坐标为 $P_i(x_i,y_i,z_i)$,$x_i$,$y_i$,$z_i$ 均存在等精度测量误差.

设待拟合直线方程为

$$\frac{x-x_0}{\boldsymbol{a}}=\frac{y-y_0}{\boldsymbol{b}}=\frac{z-z_0}{\boldsymbol{c}} \tag{4}$$

式(4)中 $(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上的任意一点,$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 为直线的方向向量.

设 $\hat{P}_i(\hat{x}_i,\hat{y}_i,\hat{z}_i)$ 为第 $i$ 次测量点的理想点坐标.

根据误差定义(误差是指测得值与真实值之差),则点的位置误差应为

$$\sqrt{(x_i-\hat{x}_i)^2+(y_i-\hat{y}_i)+(z-\hat{z}_i)^2}$$

因此拟合条件为

$$\min\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{x}_i)^2\ |\ (y_i-\hat{y}_i)^2\ |\ (z_i-\hat{z}_i)^2 \tag{5}$$

先将测量点 $P_i(x_i,y_i,z_i)$ 以点到平面的距离平方和最小为条件拟合一个 $abc$,则拟合条件为

收稿日期:2008-01-21

作者简介:胡学军(1967-),男,湖北浠水人,讲师,硕士.研究方向:智能控制与检测.

$$\min \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{x}'_i)^2 + (y_i - \hat{y}'_i)^2 + (z_i - \hat{z}'_i)^2 \tag{6}$$

式(6) 中$\hat{P}'(\hat{x}'_i, \hat{y}'_i, \hat{z}'_i)$ 为测量点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ 向平面 $abc$ 投影得到的投影点坐标，则有

$$P_i, \hat{P}'_i \perp \text{平面 } abc \tag{7}$$

对平面 $abc$ 内任意一直线 $l'$，即 $l' \subset abc$，有

$$\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}'_i, \boldsymbol{l}' = 0 \tag{8}$$

设拟合得到的平面 $abc$ 的方程为

$$z = a_1 x + a_2 y + d(a_1, a_2, d \text{ 为参数}) \tag{9}$$

再将测量点在这个平面上的投影点$\hat{P}'_i(\hat{x}'_i, \hat{y}'_i, \hat{z}'_i)$ 依据点到直线的距离平方和最小为条件拟合一条直线 $l$，则拟合条件为

$$\min \sum_{i=1}^{n} (\hat{x}'_i - \hat{x}_i)^2 + (\hat{y}'_i - \hat{y}_i)^2 + (\hat{z}'_i - \hat{z}_i)^2 \tag{10}$$

其中$\hat{P}_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{x}_i)$ 为点$\hat{P}'_i(\hat{x}'_i, \hat{y}'_i, \hat{z}'_i)$ 向直线投影得到的投影点坐标，则有

$$\hat{P}_i \hat{P}'_i \perp l \tag{11}$$

即：
$$\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}'_i, \boldsymbol{l}' = 0 \tag{12}$$

则拟合得到的直线 $l$ 方程为

$$\frac{x - x_1}{a'} = \frac{y - y_1}{b'} = \frac{z - z_1}{c'} \tag{13}$$

式(12) 中 $a', b', c'$ 为参数，如图 1 所示.

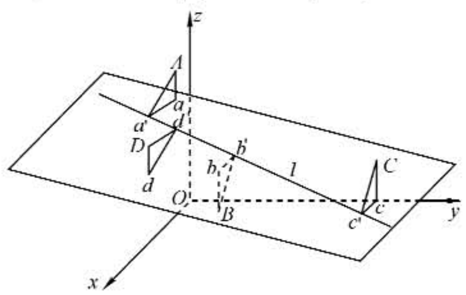


图 1　空间直线拟合示意图

Fig. 1　The explanatory drawing of space linear fit

图 1 中点 $A$、$B$、$C$、$D$ 为测量点，平面 $abc$ 是由点 $A$、$B$、$C$根据点到直线距离平方和最小为条件拟合得到的平面，点 $a$、$b$、$c$、$d$ 为点 $A$、$B$、$C$、$D$ 向平面 $abc$ 投影得到的投影点，直线 $l$ 是根据点到直线的距离平方和最小为条件拟合得到的直线，$a'$、$b'$、$c'$、$d'$ 分别是点 $a$、$b$、$c$、$d$ 向直线 $l$ 投影点得到的投影点.

由以上条件可知 $Aa \perp$ 平面 $abc$、$Bb \perp$ 平面 $abc$、$Cc \perp$ 平面 $abc$、$Dd \perp$ 平面 $abc$，$aa' \perp l$、$bb' \perp l$、$cc' \perp l$、$dd' \perp l$，所以

$$Aa' \perp l \quad Bb' \perp l \quad Cc' \perp l$$
$$Aa'^2 = Aa^2 + aa'^2, Bb'^2 + bb'^2$$
$$Cc'^2 = Cc^2 + cc'^2,\ Dd'^2 = Dd^2 + Dd'^2$$

即直线 $l$ 满足测量点与对应的理想点的距离平方和最小.

## 3　全最小二乘法在两平面平行度测量中的应用

如图(2) 所示，测量两平行面平行度的距离并分析其误差，一般三坐标测量机首先测量基准面 $S_1$ 上的若干点，分析得到一个最小二乘基准面 $A$. 然后在另一个被测面 $S_2$ 上测量若干点计算得到两一个最小二乘平面 $B$，最后分析平行面 $A$ 和 $B$ 的误差和距离.

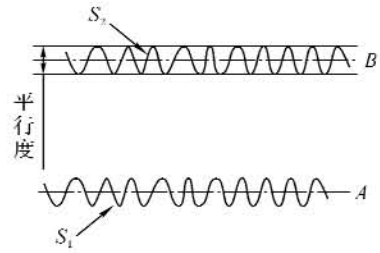


图 2　两平面平行度示意图

Fig. 2　The sketch map of two parallel's parallel scale

表 1 给出了测量数据及最小二乘法和全最小二乘法误差.

表 1　测量及处理后数据

Table 1　The data after meterage and processing　(mm)

| 序号 | X | Y | Z | $D_1$ | $D_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 172.595 | 562.834 | 66.162 | 0.019 76 | 0.022 7 |
| 2 | 203.973 | 525.790 | 66.127 | 0.014 60 | 0.011 3 |
| 3 | 234.613 | 489.648 | 66.126 | 0.021 43 | 0.022 7 |
| 4 | 265.190 | 453.520 | 66.156 | 0.018 11 | 0.020 0 |
| 5 | 295.962 | 417.192 | 66.130 | 0.006 56 | 0.005 6 |
| 6 | 324.378 | 383.661 | 66.128 | 0.011 94 | 0.014 7 |
| 7 | 351.642 | 351.457 | 66.135 | 0.001 60 | 0.003 5 |
| 8 | 386.757 | 309.969 | 66.117 | 0.025 75 | 0.022 7 |
| 9 | 409.565 | 283.080 | 66.130 | 0.003 61 | 0.007 8 |
| 10 | 440.815 | 246.174 | 66.153 | 0.024 31 | 0.022 7 |
| 11 | 478.072 | 202.180 | 66.123 | 0.010 78 | 0.080 7 |
| 12 | 511.338 | 162.949 | 66.124 | 0.017 76 | 0.022 7 |
| $\sum_{i=1}^{n} D^2$ | | | | 0.003 277 | 0.009 937 |

$D_1$ 为各测量点到用全最小二乘法拟合的误差，其中最大距离为 0.025 75 mm；$D_2$ 为各测量点到用最小二乘法拟合的误差，其中最大距离为 0.080 7 mm.

## 4　结　语

以上采用全最小二乘法拟合空间直线即以测量点到拟合直线的距离为误差，求其整体最小，同时，还对两平行面的平行度误差进行了比较，说明了这种方法简单明了且测量精度高，非常适用于三坐标机测量.

（下转第 117 页）

the connect weight simultaneously. The center vector is the center of classification, and the weight based on fuzzy membership represents the importance of feature. The features can be selected according to the final value of the weight, thus solving two major problems in pattern recognition: pattern classification and feature selection. The effectiveness of this method has been validated by IRIS data. The results show that the proposed network can select important features from the original features and maintain quite same performance as using the whole features.

**Key words**: feature selection; classification; center vector; connection weight

本文编辑：陈晓苹

（上接第 113 页）

参考文献：

[1] 朱正德. 三坐标测量机的矢量检测功能及应用[J]. 测量，2003，(1)：56-58.

[2] 刘建国. 浅谈三坐标测量机对光滑工件尺寸的测量[J]. 测量，2003，(9)：67-69.

[3] 张洪钺，黄劲东，范文雷. 全最小二乘法及其在参数估计中的应用[J]. 自动化学报，1995，(1)：40-47.

[4] 黄宣国. 空间解析几何[M]. 上海：复旦大学出版社，2004：24-53.

# The application of orthogonal least square method in 3 dimensional coordinate measure

*HU Xue-jun*[1], *WANG Jun-liang*[2], *WANG Gang*[2]

(1. School of Electrical and Infromation Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China;
2. College of Electronics Infromation, Wuhan University Wuhan 430072, China)

**Abstract**: This article describes theory of the orthogonal least square method. The space linear fit method is introduced via numerical example, which is on the condition of minimization of the square-sum of the point to line distance. The precision of the two methods are compared in 3 dimensional coordinate measure, which indicates that the orthogonal least square method is suitable for 3 dimensional coordinate measure machine.

**Key words**: orthogonal least square method; space linear; fit

本文编辑：陈晓苹