文章编号:1674 - 2869(2008)04 - 0118 - 02

扩张子空间定理的完整证明

罗　进
(武汉工程大学理学院,湖北 武汉 430074)

摘　要:本文将扩张子空间定理分解为四个命题来证明,利用线性流形与凸规划的性质,以及 K　T 条件完整地证明了扩张子空间定理.

关键词:线性流形;凸规划;K—T 点;共轭矩阵;扩张子空间定理;全局极小点
中图分类号:O 221.1　　文献标识码:A

0　引　言

扩张子空间定理是应用共轭方向法极小化正定二次函数时获得的一个重要理论成果[1~2],但在众多的文献中都只给出了这一定理的一个极其粗略的证明.本文将扩张子空间定理的证明过程分解为四个命题的证明,利用线性流形的性质、凸规划的性质及 K—T 条件,在理论上完整地证明了扩张子空间定理.

约定:以下讨论过程中所涉及到的数皆为实数,所涉及到的向量皆为实向量.

1　四个命题及其证明

定义　设 $\boldsymbol{x}^{(1)} \in R^n$ 是一个 n 维向量,$\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_k$ 是 R^n 中 k 个线性无关的向量,称集合

$$L=\left\{\boldsymbol{x}\in R^n \mid \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(1)}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{d}_i, \forall\lambda_i\in(-\infty,\infty)\right\}$$

为 R^n 中的一个线性流形.

命题 1　线性流形 $L=\{\boldsymbol{x}\in R^n \mid \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(1)}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{d}_i, \forall\lambda_i\in(-\infty,\infty)\}$ 是一个凸集.

证明　任取 $x\in L, y\in L$,记

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(1)}+\sum_{i=1}^{k}k_i\boldsymbol{d}_i, \boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{(1)}+\sum_{i=1}^{k}l_i\boldsymbol{d}_i.$$

对于 $\forall\alpha\in(0,1)$,有

$$\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}=\alpha\boldsymbol{x}^{(1)}+\sum_{i=1}^{k}\alpha k_i\boldsymbol{d}_i+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^{(1)}+\sum_{i=1}^{k}(1-\alpha)l_i\boldsymbol{d}_i=\boldsymbol{x}^{(1)}+\sum_{i=1}^{k}[\alpha k_i+(1-\alpha)l_i]\boldsymbol{d}_i\in L,$$

故 L 是一个凸集.证毕.

命题 2　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶对称正定矩阵,则规划问题

$$\begin{cases}\min f(x)=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+c\\ \text{s.t. } \boldsymbol{x}\in L=\left\{\boldsymbol{x}\in R^n \mid \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(1)}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{d}_i, \forall\lambda_i\in(-\infty,+\infty)\right\}\end{cases}\tag{1}$$

是一个严格凸规划.其中 $\boldsymbol{b}$ 是一个 n 维列向量,c 是一个常数.

证明　因 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶对称正定矩阵,故 $f(x)=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+c$ 是 R^n 上的严格凸函数.由命题 1 知可行域 $L\subset R^n$ 是一个凸集,所以规划问题(1)是一个严格凸规划.证毕.

命题 3　线性流形 $L=\left\{\boldsymbol{x}\in R^n \mid \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(1)}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{d}_i, \forall\lambda_i\in(-\infty,+\infty)\right\}$ 是线性方程组

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}x=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{(1)}$$

的解集.其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_{n-k})$,$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_{n-k}$ 是齐次线性方程组

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=0$$

的基础解系.

证明　因 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_{n-k}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系,故 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_k$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}x=0$ 的基础解系.又 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{(1)}$ 的解,所以线性流形 L 是线性方程组 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{(1)}$ 的解集.证毕.

命题 3 刻画了线性流形 $L=\left\{\boldsymbol{x}\in R^n \mid \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(1)}\right.$

收稿日期:2008 - 05 - 19
作者简介:罗　进(1969 -),男,湖南株洲人,讲师,硕士.研究方向:最优化算法.

$+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \boldsymbol{d}_i, \forall \lambda_i \in (-\infty, +\infty)\Big\}$ 的代数性质.

根据命题 3，规划问题(1) 可转化为如下形式

$$\begin{cases}\min f(x) = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + c \\ \text{s. t. } \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{(1)} = 0\end{cases} \tag{2}$$

命题 4　设 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_k$ 是 $\boldsymbol{A}$ 共轭的非零向量，对于规划问题(2)，以任意 $\boldsymbol{x}^{(1)} \in R^n$ 为初始点，依次沿 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_k$ 进行一维精确线性搜索，得到点 $\boldsymbol{x}^{(2)},\boldsymbol{x}^{(3)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(k+1)}$，则 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 是规划问题(2) 的可行 K—T 点.

证明　因 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_k$ 是 $\boldsymbol{A}$ 共轭的非零向量，故 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_k$ 线性无关. 由规划问题(1) 与(2) 的等价性及一维线性搜索的定义知，点 $\boldsymbol{x}^{(2)},\boldsymbol{x}^{(3)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 是规划问题(2) 的可行点.

要证 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 是规划问题(2) 的 K—T 点，只需证明存在数 $\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_{n-k}^*$，使

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k+1)}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k+1)} + \boldsymbol{b} = \lambda_1^* \boldsymbol{p}_1 + \lambda_2^* \boldsymbol{p}_2 + \cdots + \lambda_{n-k}^* \boldsymbol{p}_{n-k},$$

注意到 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_{n-k}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$ 的基础解系，即要证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k+1)} + \boldsymbol{b}$ 是齐次线性方程组

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = 0$$

的解，也就是要证明 $\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k+1)} + \boldsymbol{b}) = 0, i = 1,2,\cdots,k$. 事实上，当 $i = k$ 时，由一维精确线性搜索得 $\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k+1)} + \boldsymbol{b}) = 0$. 当 $i < k$ 时，

$$\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k+1)} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(i+1)} + \boldsymbol{b}) + \sum_{j=i+1}^{k}\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(j+1)} + \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(j)} + \boldsymbol{b})] = 0 + \sum_{j=i+1}^{k}\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{(j+1)} - \boldsymbol{x}^{(j)}) = \sum_{j=i+1}^{k}\alpha_j \boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}_j \quad (\alpha_j \text{ 为步长}) = 0$$

（因 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_k$ 是 $\boldsymbol{A}$ 共轭的）

证毕.

2　扩张子空间定理的证明

利用上述结论可以完整地证明扩张子空间定理[1].

定理(扩张子空间定理)　设有函数

$$f(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + c,$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称正定矩阵，$\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_k$ 是 $\boldsymbol{A}$ 共轭的非零向量，以任意 $\boldsymbol{x}^{(1)} \in R^n$ 为初始点，依次沿 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_k$ 进行一维精确线性搜索，得到点 $\boldsymbol{x}^{(2)},\boldsymbol{x}^{(3)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(k+1)}$，则 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 是函数 $f(x)$ 在线性流形

$$L = \Big\{\boldsymbol{x} \in R^n \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(1)} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \boldsymbol{d}_i, \forall \lambda_i \in (-\infty, +\infty)\Big\}$$

上的唯一极小点. 特别地，当 $k = n$ 时，$\boldsymbol{x}^{(n+1)}$ 是 $f(x)$ 在 R^n 上的唯一极小点.

证明　由命题 4 知，$\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 是规划问题(1) 的可行 K—T 点. 由命题 2 知，规划问题(1) 是一个严格凸规划，故 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 是规划问题(1) 的唯一全局极小点.

特别地，当 $k = n$ 时，$L = R^n$，从而 $\boldsymbol{x}^{(n+1)}$ 是 $f(x)$ 在 R^n 上的唯一全局极小点. 证毕.

参考文献：

[1] 陈宝林. 最优化理论与算法(第二版)[M]. 北京：清华大学出版社，2005：293.

[2] 孙文瑜，徐成贤，朱德通. 最优化方法[M]. 北京：高等教育出版社，2005：120.

Complete proof of expanding subspace theorem

LUO Jin

(School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: In this paper, expanding subspace theorem is resolved into four propositions. Applying the properties of linear manifold, the properties of convex programming and K—T condition, expanding subspace theorem is proved completely.

Key words: linear manifold; convex programming; K—T point; conjugate matrix; expanding subspace theorem; global minimum point

本文编辑：萧　宁