

文章编号:1674-2869(2008)04-0123-03

# 随机共振技术检测强色噪声中弱信号的研究

王世芳<sup>1</sup>, 邓永菊<sup>1</sup>, 吴涛<sup>2</sup>

(1. 湖北第二师范学院物理与电子工程系, 湖北 武汉 430205;

2. 武汉工程大学理学院, 湖北 武汉 430074)

摘要:通过对双稳态系统随机共振模型的数值模拟,研究了利用随机共振技术检测被色噪声淹没的微弱周期信号.这种方法对于确定频率的零检验实验,譬如光子静止质量检验实验等具有一定的参考实用价值.

关键词:色噪声;弱信号;零检验实验;随机共振

中图分类号:TN911;TP271

文献标识码:A

## 0 引言

随机共振最初是 Benzi 等人在研究古气象冰川问题时提出的<sup>[1~2]</sup>,1983年 S. Fauve 在 Schmitt 触发器电路系统中观察到了此现象<sup>[3]</sup>,但是并未引起人们的注意,直到 McNamara 在激光系统中再次观察到随机共振现象<sup>[4]</sup>才激发了广大学者的兴趣.随机共振就是一个非线性双稳态系统,仅在弱信号或噪声的作用下都不足以使系统的输出在两个稳定态之间翻转,但是在它们的共同作用下,随着噪声强度的增强,输出的信噪比非但不下降,反而大幅度的上升,并且存在一个最佳输入噪声强度,使输出信噪比达到最大,部分噪声能量转化为信号能量,从而实现了信号、噪声及非线性系统三者之间某种最佳匹配和协同作用.从频谱图上看,在信号的频率处将出现一个峰值.随机共振系统通常包括三个要素<sup>[5~7]</sup>:非线性系统、待测弱信号和噪声源.对于确定频率的零检验实验,譬如激光引力波的探测<sup>[8]</sup>、光子静止质量的检测<sup>[9]</sup>等,这些实验中要检测的信号相当微弱且往往被强噪声所淹没,我们期望可以采用随机共振的方法来提高这些实验的精度.大部分学者都致力于利用随机共振技术检测被白噪声淹没的弱信号的研究<sup>[10~11]</sup>.噪声都有不同长短的相关时间,只是在噪声相关时间远小于系统的驰豫时间时,噪声之间的关联才可以近似地忽略,此时可以当白噪声处理.但是,由于在这些实际的实验中,并不存在真正的白噪声,而关于用随机共振技术检测被色噪声淹没的弱周期信号的文章,讨论的甚

少.随机共振系统是一个非常复杂的非线性系统,有关这方面的理论目前还没有达到完全成熟,尤其运用到物理实验中,更是处在初级阶段.本文借助计算机数值模拟的方法讨论了如何检测被色噪声淹没的弱周期信号.

## 1 数值模拟

对于随机噪声来说,它具有一定的相关时间,把具有非零相关时间的噪声称为“色噪声”.一种最常见的色噪声模型是相关函数为指数型的高斯色噪声<sup>[12~14]</sup>:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t) \xi(0) \rangle = \frac{D}{\tau} e^{-\frac{|t|}{\tau}} \quad (1)$$

其中, $\tau$ 为噪声的关联时间.可以证明这种指数型高斯色噪声的功率谱具有洛伦兹谱的形式,其具体表达式为:

$$S(\omega) = \frac{2D}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (2)$$

对(2)式则可以通过傅立叶逆变换求出噪声的相关函数:

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2D}{1 + \omega^2 \tau^2} e^{i\omega(t-t')} d\omega = \frac{D}{\tau} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau}} \quad (3)$$

(3)式正好与(1)式相吻合.通过计算易知,满足(2)式噪声的总功率为一有限值.这样  $S(\omega)$  在低频处 ( $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ ) 具有白噪声均匀谱分布的形式;而在高频处  $\omega \gg \frac{1}{\tau}$  则以  $2D/(\omega^2 \tau^2)$  的形式趋于 0,确保

收稿日期:2007-10-31

修回日期:2008-05-26

基金项目:湖北省教育厅科研项目(B200531002)资助

作者简介:王世芳(1978-),女,湖北荆州人,助教,硕士.研究方向:信号检测与处理.

了(2)式在整个频带内积分的收敛性. 于是(2)式的谱不再在 $(-\infty, +\infty)$ 区间内均匀分布, 而大体在以 $\omega=0$ 为中心的 $(-\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau})$ 间内分布, 所以这个谱又称为色谱, 具有色谱的噪声叫做色噪声. 如果是指数关联的色噪声驱动的双稳态系统, 则系统的动力学方程为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bx^3 + \Lambda \sin(\omega t + \phi) + \xi(t) \\ \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\xi}{\tau} + \frac{\epsilon(t)}{\tau} \end{cases} \quad (4)$$

$\epsilon(t)$ 是均值为0, 方差为 $\sigma^2$ 的高斯白噪声.  $\tau$ 为色噪声的相关时间, 当 $\tau \rightarrow 0$ (或者 $\tau \rightarrow \infty$ )时, (3)式回到白噪声模型. 对(4)式的第二个方程积分得:

$$\xi(t) = e^{-t/\tau} \xi(0) + \frac{1}{\tau} \int_0^t ds e^{-(t-s)/\tau} \epsilon(s) \quad (5)$$

$$\xi(t+\Delta t) = e^{-(t+\Delta t)/\tau} \xi(0) +$$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{t+\Delta t} ds e^{-(t+\Delta t-s)/\tau} \epsilon(s) \quad (6)$$

联立(5)和(6)得到:

$$\xi(t+\Delta t) = e^{-\Delta t/\tau} \xi(t) + h(t, \Delta t) \quad (7)$$

其中

$$h(t, \Delta t) = \frac{1}{\tau} \left[ \int_t^{t+\Delta t} ds e^{-(t+\Delta t-s)/\tau} \epsilon(s) \right]$$

由于 $\epsilon(t)$ 是均值为零的高斯白噪声, 所以 $h(t, \Delta t)$ 也是均值为零的高斯白噪声, 其二阶矩

$$\langle h^2(t, \Delta t) \rangle = D(1 - e^{-2\Delta t/\tau})/\tau$$

由此得到指数关联的色噪声为:

$$\begin{cases} \xi|_{t+\Delta t} = \xi e^{-\Delta t/\tau} + h \\ h = [-2D(1 - e^{-2\Delta t/\tau})/\tau \ln(a_1)]^{1/2} \cos(2\pi a_2) \end{cases}$$

其中 $a_1, a_2$ 是在 $[0, 1]$ 之间均匀分布的随机数.  $\xi$ 的初始值为:

$$\xi(0) = [-2D/\tau \ln(a_1)]^{1/2} \cos(2\pi a_2)$$

图1是相关时间 $\tau=10^{-3}$ s, 噪声强度 $D=0.4$ 指数型色噪声的功率谱图, 从图1可以看出其功率谱具有洛伦兹谱形式.

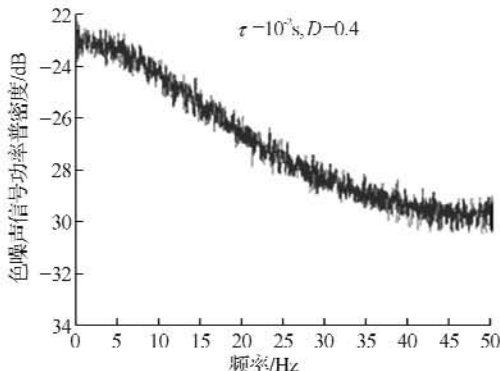


图1 模拟色噪声的功率谱图

Fig.1 The power spectrum of the color noise

前面介绍的指数关联的色噪声的相关时间 $\tau=0.01$ s相对来说较短, 我们可以近似看成白噪声, 有不少文章<sup>[11~12]</sup>已讨论过被白噪声淹没的弱周期信号的检测. 但是对于被相关时间较长的色噪声淹没的弱周期信号, 是否也能用随机共振的方法来检测呢? 现假设有一混合信号 $p(t)=0.2 \sin(0.02\pi t) + \xi(t)$ , 其中 $\xi(t)$ 是相关时间为10s, 强度为12.5的高斯指数型色噪声, 其输入信号的时域图和功率谱图分别如图2、图3所示. 由于此时输入信号的信噪比很低, 在时域、频域里分辨不出周期信号. 如果将此混合信号通过一双稳态系统, 此时选取双稳系统参数为 $a=b=0.001$ , 则系统的运动学方程为:

$$\dot{x} = 0.001x - 0.001x^3 + 0.2 \sin(0.02\pi t) + \xi(t) \quad (8)$$

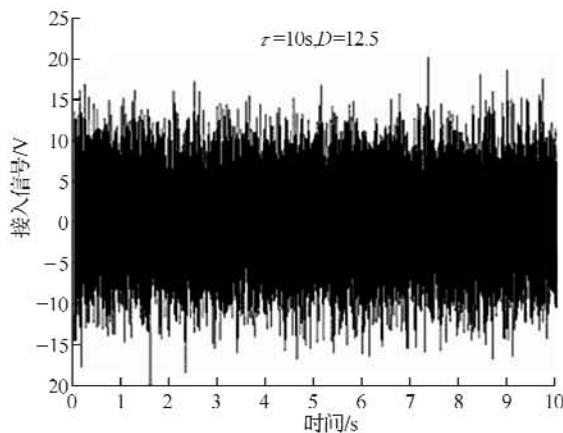


图2 正弦信号 $0.2 \sin(0.02\pi t)$ 和色噪声混合后的输入信号时域图

Fig.2 The measured time series of the input signal from the  $0.2 \sin(0.02\pi t)$  and color noise

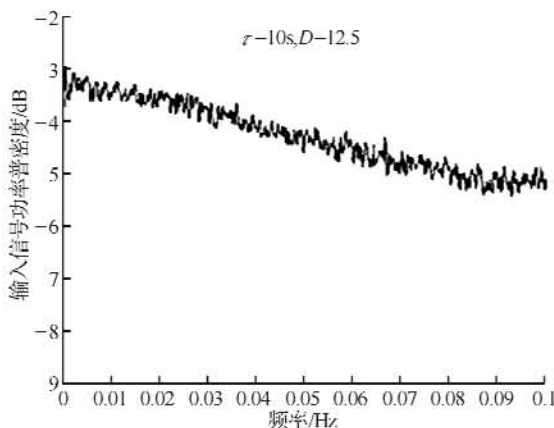


图3 正弦信号 $0.2 \sin(0.02\pi t)$ 和色噪声混合后的输入信号功率图谱图

Fig.3 The power spectrum of the input signal from the  $0.2 \sin(0.02\pi t)$  and color noise

用四阶 Runge-Kutta 方法在时间 $[0, 1000.00]$ s求解方程(8), 积分步长 $\Delta t=0.1$ s. 图4、图5分

别为混合信号通过随机共振器后输出信号的时域图和功率谱图,从功率谱图5中可以看出在 $f=0.01\text{ Hz}$ 处有一很强的正弦信号存在.由此说明了在理论上可以采用随机共振的方法检测出被色噪声淹没的弱周期信号.

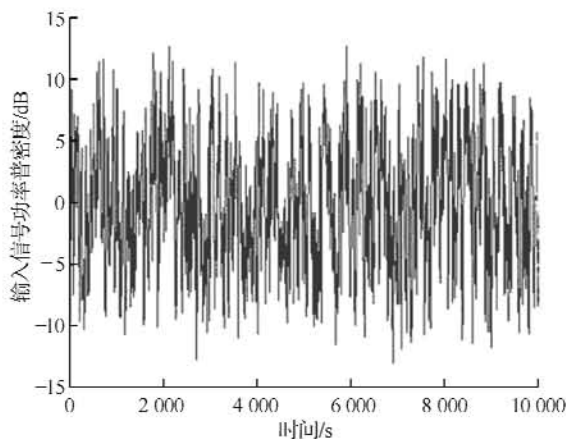


图4 正弦信号和色噪声混合后通过随机共振的输出信号时域图

Fig. 4 The measured time series of the output signal from a SR device

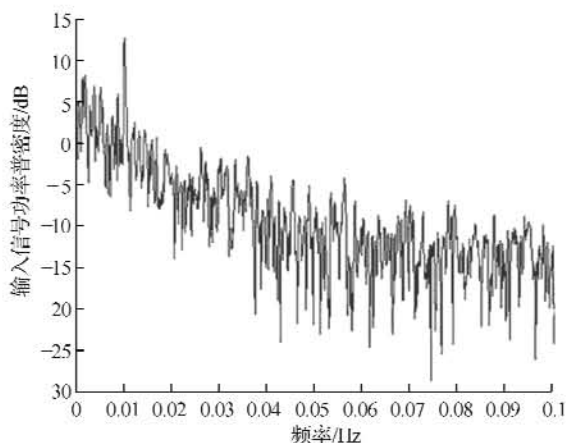


图5 正弦信号色噪声混合后通过随机共振的输出信号功率谱图

Fig. 5 The power spectrum of the output signal from a SR device

## 2 结 语

噪声在物理实验中普遍存在,实验工作者往往采用抑制或滤除信号的噪声背景的方法来获得所要信号,如傅立叶变换、小波变换、平滑滤波等手段,但是这些方法对于信噪比很小的信号的检测并不适用,而随机共振却能很好地解决这类情况.绝大部分物理实验譬如引力实验中,实际的噪声通常都不能简单地看成是白噪声,噪声之间具有一定的关联性,应看成色噪声;对于零检验实验或者某些上限检验实验来说,一般采用周期调制法来抑制背景噪声,其周期长达几小时甚至几天,

这就意味着待测信号是已知频率的超低频信号,且待检测信号往往相当微弱,被背景色噪声所淹没,随机共振的绝热近似理论正是在小幅值周期信号和低频的条件下得到的.数值模拟方法的研究表明:利用随机共振技术从理论上可以检测出被色噪声淹没的微弱周期信号.随着人们对随机共振研究的进一步深入,这种方法有望提高这些引力实验和零检验实验的精度,成为这一领域新的、强有力的信号检测与处理工具.

## 参考文献:

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of Stochastic Resonance [J]. J Phys A, 1981, (14): 453-457.
- [2] Benzi R, Parisi G, Stera A, et al. Stochastic resonance in climatic change [J]. Tellus, 1982, (34): 10-16.
- [3] Fauve S, Heslor F. Stochastic resonance in a bistable system [J]. Phys Lett, 1983, 97(5).
- [4] McNamara B, Wiesenfeld K, Roy R. Observation of Stochastic Resonance in a Ring Laser Phys [J]. Phys Rev Lett, 1988(60): 2626-2629.
- [5] McNamara B, Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance [J]. Phys Rev A, 1989, 39, (9): 4854-4869.
- [6] Luca Gammaitoni, Peter Hanggi, Peter Jung, et al. Stochastic Resonance [J]. Reviews of Modern Physics, 1998, 70: 223-287.
- [7] Hu Gang, Nicolis G, Nicolis C. Periodically forced Fokker-plank equation and stochastic resonance. Phys Rev A, 1990, 42(4): 2030-2041.
- [8] Enrico Montanari, Pierluigi Fortini. Coherent interaction of a monochromatic gravitational wave with both elastic bodies and electromagnetic circuits [J]. Phys Rev D, 1999, 59: 024001-024007.
- [9] Luo Jun, Tu L C, Hu Z K, et al. New Experimental Limit on the Photon Rest Mass with a Rotating Torsion Balance [J]. Phys Rev Lett, 2003, 90: 081801-081805.
- [10] 杨祥龙. 一种强噪声背景下弱信号检测的非线性方法 [J]. 电子与信息学报, 2002, 24(6): 811-815.
- [11] 杨定新. 随机共振在微弱信号检测中的数值仿真 [J]. 国防科技大学学报, 2003, 26(6): 91-94.
- [12] Marches F. Analog simulation of underdamped stochastic systems driven by colored noise: Spectral densities [J]. Phys Rev A, 1988, (37): 3058-3066.
- [13] Ronald F Fox, Ian R Gatland. Fast, accurate algorithm for numerical simulation of exponentially correlated colored noise [J]. Phys Rev A, 1988, 38

- (11):5938-5940. numerical integration of colored-noise problems[J].  
 [14] Ronald F Fox. Second-order algorithm for the Phys Rev A, 1991, 43(6):2649-2654.

## Study on the application of stochastic resonance for detection weak signal from color noises

WANG Shi-fang<sup>1</sup>, DENG Yong-ju<sup>1</sup>, WU Tao<sup>2</sup>

(1. Physics and Electronic Information Department, Hubei Institute of Education, Wuhan 430205, China;  
 2. School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** In this paper, numerical analyses have been made on stochastic resonance model in bistable dynamical systems, which study the application of stochastic resonance for weak signal extraction from color noise. The method looks very promising in the view of the application to null result experiments with modulation methods, such as experiment tests on the photon rest mass.

**Key words:** color noise; weak signal; null result experiments; stochastic resonance

本文编辑: 萧 宁



(上接第 78 页)

## Co-precipitation preparation and luminescence properties of calcium tungstate ( $\text{CaWO}_4$ ) doped with europium (Ⅲ) or terbium (Ⅲ)

LI Jian-qiu, HUANG Zhi-liang

(School of Material Science and Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074; China)

**Abstract:** The  $\text{CaWO}_4$  tricolor phosphor powder doped with rare-earth  $\text{Eu}^{3+}$ ,  $\text{Tb}^{3+}$  by co-precipitation preparation method are synthesized successfully. XRD are used to characterize of the crystal structure. Study shows that due to the size of  $\text{Eu}^{3+}$ ,  $\text{Tb}^{3+}$  ions, as large as the  $\text{Ca}^{2+}$ , the rare-earth doped into  $\text{CaWO}_4$  did not cause major changes. Using FT-IR shows that the  $\text{CaWO}_4$  doped with rare-earth  $\text{Eu}^{3+}$ ,  $\text{Tb}^{3+}$  makes the aberrance of the tetrahedron of  $\text{WO}_4^{2-}$ . PL was used for analyzing luminescent characteristic of samples. As a result, the single phase  $\text{CaWO}_4$  powder produce the blue-ray of 430 nm,  $\text{CaWO}_4:\text{Eu}^{3+}$  powder radiated green luminescence of 543 nm, and  $\text{CaWO}_4:\text{Tb}^{3+}$  powder will produce red lights of 616 nm.

**Key words:**  $\text{CaWO}_4$ ; doped; rare-earth; optical material

本文编辑: 萧 宁