文章编号:1674－2869(2009)01－0076－03

偏斜圆盘定轴转动时的动力学建模方法探讨

夏新念
(武汉工程大学机电工程学院,湖北 武汉 430074)

摘　要:建立空间动力学问题的数学模型的好坏将直接影响到求解过程的复杂程度和对问题实质的理解. 在普通三元复数模型的基础之上,对偏斜圆盘定轴转动时的附加动约束力的计算进行了讨论,在此过程中,提出了普复面及普复数的概念,进一步完善三元复数模型,并验证了该种三元复数模型的可行性和简便性.

关键词:偏斜圆盘;定轴转动;三元复数;动力学建模;普复面
中图分类号:O 313.2　　文献标识码:A

0　引　言

在工程实践中,当转子作定轴匀速转动时(即 $\alpha=0,\omega=C$),转子自身常常伴随受到一个附加动约束力的作用,而且支承转子转动的轴承也将受到同样大小的动反力的作用. 对转轴动力学问题的研究,不仅是对于转轴本身的动力学性能的了解,还是对于选择及设计轴承都具有实际意义.

理论力学研究表明,这种附加动约束力是随着转轴的旋转而周期性变化的,当转子作高速转动时,这种周期变化的附加动反力,会引起轴承和基座的强烈振动,加速机器的疲劳破坏. 消除定轴转动刚体的附加动约束力的根本方法,就是使刚体的达朗贝尔惯性力系自成平衡力系. 具体地说,就是要求刚体的转轴必须是中心惯量主轴. 但对于实际转动的高速机械,由于制造和安装误差,转轴相对于转子的位置不会通过中心惯量主轴,而存在一定的偏心或偏斜. 即使偏心或偏斜不是很大,但由于转速很高,这时转子受到的附加动约束力还是很大的.

由于动力学问题的复杂性,现有教科书只对非常简单的杆类、盘类问题进行了转子的附加动约束力解析研究. 对于偏斜薄圆盘的定轴转动,从工程角度看,它应属于不太复杂的动力学问题. 即使如此,要想从理论上弄清楚其相互关系仍感到困难. 这是因为它涉及空间三维达朗贝尔惯性力计算、定点运动动力学、惯性主轴及其坐标转换等知识内容[1]. 概念多且计算复杂,不易掌握.

从表面看来这是问题本身的复杂性所致,其实是由于空间图形的位置关系不容易表达清楚,不能带来直接的视觉冲击和直观感受. 正因为这些困难,才造成了理解上的障碍. 由于现有数学空间解析工具的不足,没有一种既易于直观想象又方便解析计算的理想的有关空间问题的计算方法. 文献[2]中提出的三元复数模型,目的之一就是试图弥补这一缺陷. 本文试图以三元复数模型作为数学工具,尝试处理偏斜圆盘的动力学问题. 并以此为基础,在解决该问题的过程中进一步提出普复面及普复数的概念,同时完善三元复数模型.

1　偏斜圆盘动力学问题的表述

图 1 所示均质薄圆盘,质量为 m,密度为 ρ,半径为 R. 由于某种原因,未能使中心对称轴与转轴同轴,而是有一偏角 β. 为了简化问题,设圆盘不偏心,转轴通过质心 C. 若轴承 A、B 的距离为 L,当圆盘以匀角速度 ω 作定轴转动时,A、B 处轴承对转轴施加的附加动约束力的大小未知。

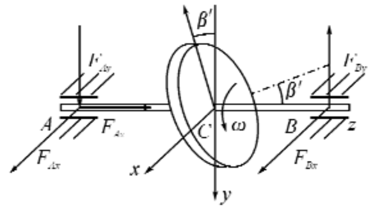

图 1　偏斜薄圆盘的定轴转动

Fig. 1　The fixed rotation of a thin plate inclined

由理论力学分析知,附加动约束力的产生来源于圆盘的不平衡惯性力. 由于圆盘的对称性,转轴在 x 方向所受到的附加动约束力互相抵消,而转轴在 z 方向不产生附加动约束力,最后只剩下 y 方向的附加动约束力需要分析.

收稿日期:2008－03－18
作者简介:夏新念(1961－),男,湖北武汉人,硕士,副教授. 研究方向:一般力学及机械设计理论(机构学).

上述问题的实质,也可转换成这样一个问题,即求解均质薄圆盘的空间分布惯性力系的合力及其由惯性力引起的约束平衡力.大家首先想到的当然是通过对面积的微积分来计算.这种思路没有问题,但应如何计算呢?算式该如何表达呢?问题的核心在于空间力系的解析计算及空间概念的表达上面.

2　偏斜圆盘三元复数模型的建立

该问题的数学模型或空间力系的数学表达并不能直接建立在常规的三维复空间坐标系中[2],因为在此问题中圆盘是偏斜的.本人以前提出过的三维复空间模型也不能适用于[2]对这个问题的研究.因为在以前讨论的三维复空间结构模型中,其实只探讨了两类复平面——实复面(通过实轴的平面)和虚复面(垂直于实轴的平面)的特性.而更一般化的与实轴斜置的普复面还没有研究.显然,如图 2 所示,普复面的方位(用法线表示)在三维复空间中与实轴 Z 是有一个倾角 β 的.显然,实复面和虚复面是普复面的两种特殊情形.

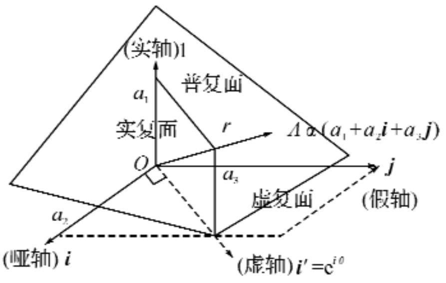

图 2　普复面示意图

Fig. 2　The sketch of a general complex plane

普复面上的一个向径应如何用三元复数表达?还是回到偏斜圆盘动力学问题上来.只要恰当选择坐标系,该问题是可以得到简单解决的.这时,以偏斜圆盘与转轴的交点 O 为原点,转轴 z 方向为实轴,转轴的横截面为虚复面,偏斜圆盘与通过 O 点的横截面的交线为哑轴 $\boldsymbol{i}$,假轴 $\boldsymbol{j}$ 由右手坐标系确定,即建立起解决该问题的三维复空间坐标系,如图 3 所示.需要指出的是,这时的偏斜圆盘平面既不通过实轴,也不垂直于实轴,显然它应当属于刚才所定义的普复面.值得注意的是,这样建立的坐标系是与偏斜圆盘相固连的,当偏斜圆盘转动时,坐标系也随之转动.为了问题简单化,圆盘图形是这样表达的,取垂直于哑轴 $\boldsymbol{i}$ 的平面为正视图,如 3(a)图;取垂直于实轴 1 的平面为辅视图,如 3(b)图;取 A 向视图为图 3(c)图.在此基础上,坐标系的选择同时标示在图 3 中.下面具体研究普复面上任一向径在三维复空间中的表达.

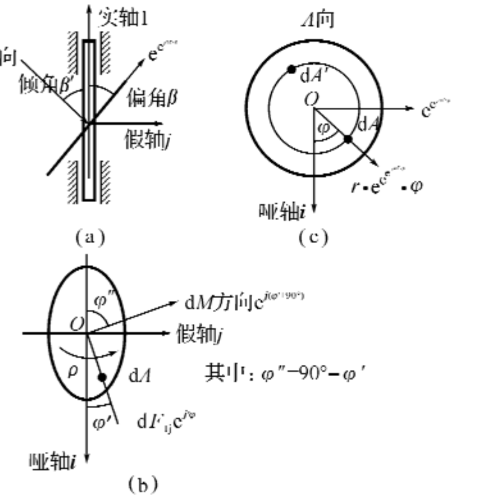

图 3　偏斜圆盘三维复空间坐标系的建立

Fig. 3　The finding of the three dimensions complex space's coordinate system for the inclined plate

对于普复面上的任一向径 $\boldsymbol{r}$,其与哑轴的幅角为 φ,在此复面内的"类虚轴"为 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{j90}\beta}$.于是,按照三元复数的概念,将三元复数在普复面上推广,在此复面内,任一向径 $\boldsymbol{r}$ 是可以与一个三元复数 $\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{e}^{j'\cdot\varphi}$ 相对应的,即能定义出一种新型三元复 $\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{j90^\circ}\cdot\beta}\cdot\varphi}$,这是一个三重指数式复数表示式,它可以指代该普复面上的任一矢量或向径.使用这种指数式复数,形式简单,几何意义明显.$\boldsymbol{r}$ 代表向径的大小,φ 为其在普复面上的幅角,$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{j90}\beta}$ 为该复面上的"类虚轴"在整个三维复空间坐标系中的复数表示,指明该三元复数的方位.这里的 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$,既是三维复空间中的单位矢量,又是对应的三元复数中的两虚数,因为在复空间中,单位矢量与单位虚数是一一对应 的.显然,在普复面上定义的普复数与在实复面上定义的实复数以及在平面上定义的二元复数其几何意义是相似的,它是普通二元实复数在普复面上的推广.当然,这样定义的普复数与该平面内的向径 OA 满足一一对应关系.

上述普复数向所在的三维复空间坐标系展开,即可获得该三元复数的分量式.将它先在普复面内展开,即

$$\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{j90^\circ}\cdot\beta}\varphi}=\boldsymbol{r}\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\boldsymbol{r}\sin\varphi\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{j90^\circ}\cdot\beta}$$

然后再将 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{j90}\beta}$ 展开为图示坐标系内的坐标分量,即

$$\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{j90^\circ}\cdot\beta}\varphi}=\boldsymbol{r}\cos\varphi\cdot\boldsymbol{i}+\boldsymbol{r}\sin\varphi(\cos\beta+\sin\beta\,\mathrm{e}^{j90^\circ})$$

显然:$x=\boldsymbol{r}\cos\varphi$;

$y=\boldsymbol{r}\sin\varphi\sin\beta$

$z=\boldsymbol{r}\sin\varphi\cos\beta$.

3　偏斜圆盘动力学建模及求解

在获得普复面上的三元复数模型后,现在可

以研究偏斜薄圆盘所受到的离心惯性力的大小.以偏斜圆盘平面为普复面,上述普复数也可表示成在实复面上的实复数形式：

$$\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{c}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{j90^\circ} \cdot \beta}} \varphi = \boldsymbol{r} \sin\varphi \cos\beta + \rho \mathrm{c}^{j\varphi'}$$

其中,$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \boldsymbol{r} \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \sin^2\beta}$.

在普复面上任取一个微面积单元 $\mathrm{d}\Lambda$,大小为 $\boldsymbol{r}\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$,该微面积上所包含的质量为：

$$\mathrm{d}m_i = \rho \cdot \boldsymbol{r}\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

其中 ρ 为密度. 该质量所产生的达朗贝尔惯性力大小为

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{I}i} = \mathrm{d}m_i \cdot a_i = \rho \cdot \boldsymbol{r}\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \rho\omega^2$$

其方向位于虚平面内且背离轴中心,具体为 $\mathrm{e}^{j\varphi'}$.用三元复数表示就是：

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{I}i} = \rho \cdot \boldsymbol{r}\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \rho\omega^2 \mathrm{c}^{j\varphi'}.$$

由于圆盘斜置,只要进行简单的受力分析可知,圆盘面上任一微面积 $\mathrm{d}\Lambda$ 与处于对称位置上的微面积 $\mathrm{d}\Lambda'$ 两者产生的离心惯性力共同组成一个方向位于横截面内的力偶. 正是由于这一惯性力偶的出现,才是轴承对转子产生附加约束力的根源. 该力偶的大小为

$$\mathrm{d}M = \mathrm{d}F_{\mathrm{I}i} \cdot 2z$$

方向为：$\mathrm{e}^{j(\varphi' + 90^\circ)}$

若用三元复数表示,就是：

$$\mathrm{d}M_{\mathrm{I}i} = \rho\omega^2 \cdot \boldsymbol{r}\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot 2\boldsymbol{r}\sin\varphi\cos\beta \cdot \rho\mathrm{e}^{j(\varphi' + 90^\circ)}$$

该力偶在转轴方向上没有分量. 由于圆盘的对称性,整个圆盘所有质点产生的惯性力偶在 y(即 $\boldsymbol{j}$ 轴)方向上的分量相互抵消. 最后只需要计算该力偶矩在 x 方向上的分量：

$$\mathrm{d}M_{xi} = -\mathrm{d}\,M_{\mathrm{I}i} \cdot \cos\varphi'' = -\mathrm{d}M_{\mathrm{I}i} \cdot \sin\varphi' = -\rho\omega^2 \cdot \boldsymbol{r}\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot 2\boldsymbol{r}\sin\varphi\cos\beta \cdot \boldsymbol{r}\sin\varphi\sin\beta = -\rho\omega^2 \cdot \sin2\beta \cdot \boldsymbol{r}^3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

其中 $\rho\sin\varphi' = y = \boldsymbol{r}\sin\varphi\sin\beta$.

余下的问题,只需对整个圆盘面进行面积积分,则得：

$$M_x = -\rho\omega^2 \cdot \sin2\beta \cdot \int_0^R \boldsymbol{r}^3 \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \int_0^\pi \sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi = -\rho\omega^2 \cdot \sin2\beta \cdot \frac{R^4}{4} \int_0^\pi \frac{1 - \cos2\varphi}{2} \mathrm{d}\varphi$$

$$M_x = -\rho\omega^2 \cdot \sin2\beta \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{mR^2}{8} \sin2\beta\omega^2$$

其中 $\rho \cdot \pi R^2 = m$(圆盘质量).

这就是偏斜圆盘在运动过程之中产生的总惯性力偶矩,该惯性力偶矩只有由轴承产生的附加约束力 $F_{\mathrm{A}y}$ 和 $F_{\mathrm{B}y}$(伴随着力偶矩)来平衡. 如图 1 所示. 即一定存在关系式：

$$M_x + F_{\mathrm{A}y} \cdot l = 0.$$

由此可获得附加动约束力为

$$F_{\mathrm{A}y} = \frac{mR^2}{8l} \sin2\beta' \omega^2$$

在图 1 ～ 3 中,$\beta = 90^\circ - \beta'$.

4 结　语

显然,在上述论证过程中,不需要引入深奥、复杂的动力学知识,只需要具备一点三元复数知识以及空间想象能力就可解决问题. 这对于一般工程技术人员及现在年青的工科大学毕业生而言,掌握并理解它不再成为难题. 上述论证结果与文献[1]的讨论完全相同.

机械中三维空间问题的解决确实需要简洁的数学模型,三元复数模型的提出,对于化解三维空间数学建模难题会起到一定作用. 以上所述内容是三元复数的又一具体应用之一. 本文采用的三元复数模型,是在文献[2]、[3]、[4]基础上的继续深化和进一步扩展. 普复面、普复数及其三重指数式三元复数的提出,进一步完善了三元复数模型. 概念形象直观、形式简洁实用、几何意义明显,是这种模型的优点.

参考文献：

[1] 梅凤翔. 工程力学：下册[M]. 北京：高等教育出版社,2003：247.

[2] 夏新念. 三元数及其在实数域上三维代数[J]. 武汉化工学院学报,2004,(2)：80-82.

[3] 夏新念. 圆柱凸轮轮廓设计中的三元复数建模工具[J]. 现代机械,2005,(6)：11.

[4] 夏新念. 万向节两传动轴转角关系的三元复数推证方法[J]. 机械设计与制造,2007,(1)：1-3.

(下转第 82 页)