

添加辅助线辅助点在计算机自动推理中的研究

李涛

(华南农业大学现代教育技术中心, 广东 广州 510642)

摘要:在证明中使用辅助线和辅助点,是传统几何的特色,是高智能的解题方法,但却给几何证明的机械化增添了很大的困难. 尝试在自动推理中应用辅助线和辅助点. 实验证明,对较为复杂的几何问题来说,采用这种方法可以显著提高推理效率.

关键词:自动推理;自动解题;辅助线;辅助点

中图分类号:TP 181

文献标识码:A

0 引言

计算机自动推理是人工智能的一个重要研究领域,应用十分广泛,而几何定理机器证明就是自动推理领域的一个重要分支,它是基于规则的推理模式. 如何让计算机具有数学思维能力,亦即不仅会计算数学问题,而且能够证明数学定理,这就是定理机器证明要研究的内容,也是十七世纪大数学家莱布尼兹(Leibniz)就开始幻想的课题^[1],中外很多学者在这方面做出了卓有成效的努力^[2]. 二十世纪70年代,吴文俊院士从中国传统数学思想出发,从几何定理证明入手进行数学机械化研究,并建立了一套数学机械化方法,即“吴法”^[3],他不仅将中国传统数学发扬光大,也为国际自动推理的研究开辟了新的前景. 80年代中期,中科院院士张景中先生提出了面积法^[4]、消点法^[5],使几何定理可读证明的自动生成这一难题得到突破,极大地推动了几何定理机器证明领域的研究.

在几何定理的机器证明中,当无法确定命题的真假时,可能存在三种情形,一种可能是命题本身有误,另一种可能是所性的规则太少,第三种可能就是缺少必要的辅助信息,使得某些规则无法使用,这就需要添加必要的辅助线和辅助点. 前两种问题都容易解决,第三种充分体现了人类思维活动的灵活性与丰富性,尚难于机械化. 在现行具有推理功能的教育软件中,实现添加辅助线和辅助点的推理软件较少,现行推理软件的推理认为图形中任意两点间都存在连线,产生的所有信息

都参与推理,因此即使推理一个简单的问题,所产生的无用信息大大多于有用的信息,降低了推理速度,甚至一些较复杂的几何题目根本无法进行推理.

总的来看,对于计算机自动添加辅助点问题的研究已经取得了一定的突破,但添加辅助线和辅助点问题具有很强的技巧性,计算机实现起来具有一定的难度和局限,对于某类辅助线和辅助点的添加也有一定的规律可循,对于有特定规律可循的问题是可以机械化的,因此对于某些辅助点的添加可以用计算机来实现. 本文工作通过区分连线添加辅助线和一边添加一边删除的思想,对计算机自动添加辅助线和辅助点两方面的问题做了重点研究.

对于添加辅助线问题,先考虑图形中有连线的信息参与推理,限制了信息膨胀,推理效率明显提高,特别是对于图形复杂而又仅靠现有连线就证得结论的问题,推理速度提高更加明显. 如果仅靠现有连线无法证得结论时,再把保存起来的无连线的信息一一取出,并设置成有连线的信息,放入推理库中,继续参与推理,循环重复直到结论得出或某一结束条件为止.

对于添加辅助点问题,通过对一些常见的几何图形,规定一些典型的辅助算法,程序运行中碰到符合条件的图形,即自动引用辅助算法指明的处理方法,当添加的辅助点无法证得结论的情况下,即时清除该辅助点及辅助点产生的相关信息,再继续考虑添加其他的辅助点,根据这一思想实现了几种类型的辅助点的添加,不仅提高了推理

效率,而且进一步增强了计算机解题能力和解题灵活性。

本文利用计算机自动添加辅助线和辅助点的有效算法证明了一批需要添加辅助线和辅助点才能解决的几何问题,初步实现了计算机解决更高智能的几何问题,解题能力更接近人类的智慧。

1 系统实现的基础

1.1 基础原理概述

为了使计算机输出的证明过程尽可能传统化并与教科书上的内容相一致,本文主要采用前推搜索的推理模式^[6]。

搜索方法的基本思路是^[1,2,7]:预先选定一个推理规则的集合 R , 对于一个待判定的几何命题 T , 把该命题的已知条件分解成语句集合 D_0 , 作为推理的初始条件。把命题的结论语句(组)作为 C , 将 R 作用于 D_0 (即将 R 中的规则轮流与 D_0 中的有关语句相匹配, 匹配成功时将得到的新语句加入 D_0), 产生一个新的语句集合 $D_1 \supset D_0$, 将 R 作用于 D_1 产生新的语句集合 $D_2 \supset D_1, \dots$, 这样可以得到:

$$D_{n+1} \supset D_n \supset \dots \supset D_1 \supset D_0$$

一个几何问题或图形只包含有限个点, 而推理的规则和已知条件也是有限的, 由有限个已知条件只能产生有限条语句, 因此必定存在某个自然数 k 使得 $D_k = D_{k+1}$, 此时, 将 R 作用到 D_k 上不能产生新的语句, 从而对于任何 $n \geq K$ 均有 $D_n = D_k$, 推理达到不动点。

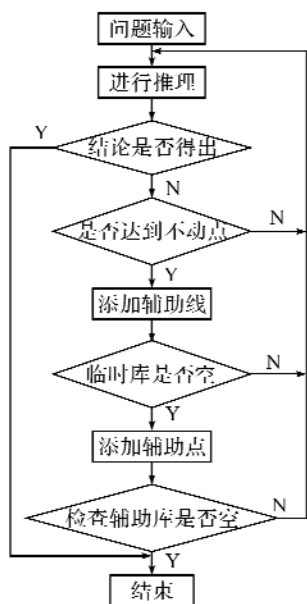


图 1 推理结构图

Fig. 1 System reasoning structure

1.2 推理结构图

推理部分分为三个阶段, 第一阶段, 只考虑显示连线的信息进行推理; 第二阶段, 考虑添加辅助线; 第三阶段, 考虑添加辅助点。

1.3 核心数据结构设计

定义 1 通常的定义、公理、定理、引理、公式等通称规则。

推理过程需要创建并维护 3 个核心的 C++ 类。描述几何对象, 存放用于推理的信息和推理产生的新信息, 把它定义为信息类 (CInfo); 推理所需要的推理规则, 把它定义为规则类 (Clemma); 具体的推理机制和推理过程, 并把它定义为推理类 (Creasoning)^[8]。推理类定义了事实表, 为了存储方便, 本系统将谓词相同的信息放到同一个表中, 即将事实表按照谓词的不同划分为若干个子表, 分别定义针对直线和二次曲线之类的子表等等。推理类是整个程序的核心部分, 实现了自然语言向内部语言的转化、进行前向搜索推理和生成证明过程等等。此外, 为了简化推理过程和提高推理效率, 采用等价类的概念进行了信息压缩^[9]。

2 处理辅助线问题

2.1 添加连线结构图

辅助线的处理包括两个层面的问题, 一方面, 保证有连线的信息进行推理, 并保存没有连线的信息; 另一方面, 结论无法得出时, 取出保存的没有连线的信息, 并设置成辅助线, 放入推理信息库中, 继续推理。

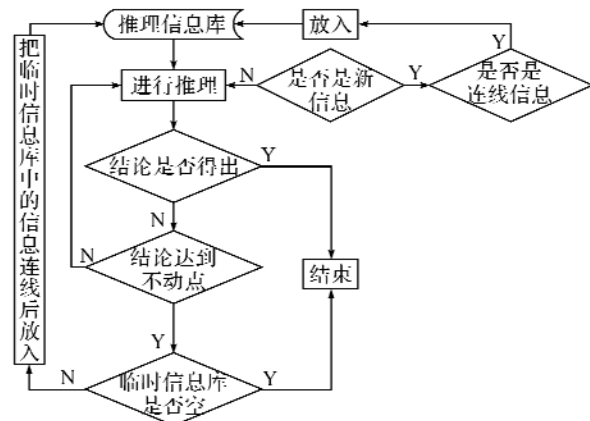


图 2 添加连线结构图

Fig. 2 Adding line structure

2.2 添加连线算法

2.2.1 区分有无连线信息算法描述 现有的平面几何推理中认为任意两点间都有连线, 并把产生的有连线和没连线的信息都放入推理库中参与推理, 势必影响推理速度。本文区分连线的思想是

将有连线和没连线的信息区分开存放,有连线的信息放入推理库中参与推理,没连线的信息放入临时信息库中不参与推理。

考虑线的存在性,也就是把线也作为构成几何图形的基本元素,用点和线来描述图形的性质,由于线也是由点来描述的,因此就会出现有些线是图形中存在的,即图形中显示出来的连线,有些线是不存在的,即图形中没有显示出来的,为了让计算机模拟人的这一识别行为,在信息类中增加一个区分有无连线的变量 b ,初始化 b 为0,构成推理信息的直线信息决定着此推理信息是否符合推理的条件,而且不同的信息所具有的直线条数也不尽相同。我们规定:当构成推理信息的所有直线中有一条直线的 $b=0$ 时,表示这条信息存在没有连接的直线;当构成推理信息的所有直线的 b 都不为0,表示此信息中的线都有连线。

为了识别图形中已知存在的连线,推理系统中有一个生成几何信息库的子程序,当图形画好后,如果有些条件在图形上表现不出来,可以添加附加条件,如线段的长度,角度值。这一子程序自动运行,从这些题目条件中收集各种几何信息生成几何信息库,把图形中已连接的直线中的 b 设置为1,标记图形中现有的连线。推理过程中产生的信息,检查构成此信息的直线中是否存在 $b=0$ 的直线,若存在则表示此信息不可用,则放入不参加推理的临时信息库中,只有构成此信息的所有直线的 b 都不为0,才把此信息放入推理信息库中,比如垂直信息 $AB \perp CD$,有两条直线 AB, CD ,如果两条直线中仅有一条直线中的 b 不为0,则放入不推理的信息库中;若两条直线中的 b 都不为0,则此垂直信息才放入推理信息库中,保证了只有存在连线的信息才参与推理。

2.2.2 实现添加辅助线算法描述 如果仅靠现有连线无法得出结论时,就要考虑添加辅助线,计算机把上述过程保存在临时库的无连线信息取出,每取出一条信息,首先检查构成此信息的直线中,哪条直线是没连接的线,即哪条线的 $b=0$,并将 b 的值改成 $b=2$,表示该线是辅助线,放入推理库参与推理,若结论得出,则该连线就是我们在图形中添加的辅助线,如果结论得不出,说明该连线不是我们需要添加的辅助线,则继续从无连线信息库中提取无连线信息,标记成辅助线放入推理库参与推理,循环往复,直到结论得出或者临时信息库为空即所有可能的连线都已经连起来了,此时退出推理。当结论得出后,计算机内部已完成添加辅助线功能,但并不是所有的辅助线都是成功

的辅助线,需要的只是那些与证明过程有关的辅助线,因此需要把有用的辅助线提取出来,画图系统再把有用的辅助线在图形上显示出来。

有用的辅助线的提取方法是在提取推理过程中,检查构成信息的直线是否被标记成了辅助线,也就是检查构成信息的直线中 $bLine$ 是否为2,把 $bLine=2$ 的线提取出来,存放于添加辅助线表中,推理过程提取完毕后,则与结论有关的辅助线也全部存放到了辅助线表中,从而保证了辅助线表中的辅助线都是与证明过程有关的辅助线,作图系统只需将辅助线表中提供的辅助线作出即可。因此图形上显示出来的辅助线也是与证明过程有关的辅助线,这样实现的计算机自动添加辅助线的效果与传统手工证明添加辅助线效果完全相同。采用这种方式区分连线后推理效率明显改进。限于篇幅,添加辅助线的数据结构本文不作叙述。

3 处理辅助点问题

3.1 添加辅助点结构图

辅助点的处理包括两个层面的问题,一方面,添加辅助点进行推理;另一方面,如果添加的辅助点能证得结论,则保留此辅助点并根据计算出来的辅助点的坐标和辅助点的名称在图形上显示出,如果添加的辅助点无法证得结论,则把添加的辅助点及辅助点产生的相关信息全部删除,再考虑其他辅助线的添加,辅助点的删除包括删除辅助点的坐标及名称。

定义2 满足添加辅助点依据的信息匹配后放在一起形成辅助库。

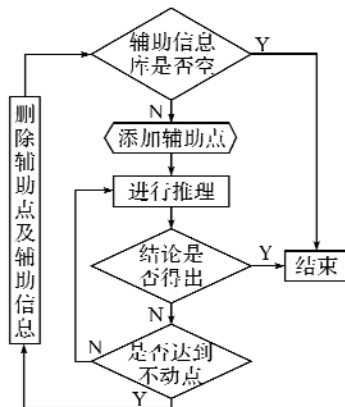


图3 添加辅助点结构图

Fig. 3 Adding Auxiliary Point Structure

3.2 辅助点的添加

3.2.1 添加辅助点的目的和原则 目的:扩大几何信息库,信息库的扩大使得原来不能使用的推理规则变得可用,从而有可能使得几何信息库中包含结论,由此判断命题成立。

原则:

(1) 将有利于已知和未知的因素集中, 便于联系和比较.

(2) 有利于挖掘隐含的已知条件.

(3) 有利于造成新的等量关系来补充条件.

(4) 有利于复杂的图形、不规则的图形的转变.

3.2.2 辅助点的生成 在推理软件中每个点都有其名称和坐标, 故辅助点的生产包括点的名称及点的坐标生成. 点的名称生产, 计算机内部存放着所有的点, 而每个点都有一个序号, 按读取信息的先后顺序排号, 在读取过程中, 把这一序号和英文字母相对应, 故显示给用户的点的名称以英文字母命名, 添加的辅助点转化为计算机可识别的符号, 故在计算机中按进来的顺序编号, 因此在读取过程中, 辅助点的名称也相应生成. 辅助点的生成并不是独立的, 它的添加有一定的规律满足一定的条件, 而满足的条件是由已知信息构成的, 因此辅助点与已知点之间有着密切的联系.

例如: 等腰三角形 ABC , 添加底边 BC 的中点, 首先添加点的名称 D , 然后是点 D 的坐标, 根据 B, C 的坐标很容易计算出 D 的坐标, 分别放入点的名称表示和坐标表里, 还有辅助信息“ D 是 BC 的中点”, 此信息是由添加辅助点产生的中点信息, 把中点信息放入几何信息库中的中点信息一类中, 接下来进行进一步的推理, 把推理规则库作用到扩大的几何信息库中, 推出新的信息, 并检查结论是否得出, 如果得出就跳出推理系统, 否则继续推理, 当达到推理不动点时结论还未得出, 说明该辅助点没有起到作用, 将该辅助点及其产生的信息全部删除, 再使用辅助库中的下一种类型的辅助点, 循环使用辅助信息库种的匹配信息, 直到结论得出或者所用的匹配信息全部用完退出推理系统. 限于篇幅, 生成辅助点的数据结构本文不作叙述.

3.2.3 辅助库的生成 不同的题目有不同的添加辅助点的方法, 往往有经验的人都知道添加怎样的辅助点, 即添加辅助点有一定的规律可循. 证明几何问题, 有效算法是至关重要的, 但也离不开知识, 辅助点的添加有一定的规律和依据, 这些规律和经验即是添加辅助点所需要的知识, 根据添加辅助点的思想, 尽可能的对所有常见特殊几何图形规定添加辅助点的特殊算法, 并把满足算法的条件放在一起, 形成辅助库. 当结论证不出时, 程序自动检查辅助库, 遇到符合条件的图形, 即自动引用辅助算法中指明的处理方法, 实现添加辅

助点的功能.

例如, 对于一腰上有中点的梯形, 规定添加另一腰的中点算法. 因此推理前必须把梯形和中点信息进行匹配, 并把由匹配信息及辅助点的类型和匹配信息的来历构成的信息放入辅助信息库中, 推理过程中把辅助库作用到信息库上, 如果图形性质中存在一腰上有中点的梯形, 则根据规定的算法, 自动生成另一腰中点.

3.3 辅助点及辅助信息的删除

每新增加一个辅助点, 对应的坐标表、字母表及字母表所对应的数据表都会相应的增加新的数据, 因此删除辅助点即是要把三个表中新增加的数据删除, 分别记录这三个表的增加辅助点前后的长度, 通过一个 for 循环删除两个长度数之间的数据即可. 要删除辅助点生成的信息, 就有必要记住添加辅助点前后的各类信息最大数, 假设添加辅助点前的信息最大数 n_1 , 添加辅助点后达到信息不动点时, 记录此时的信息最大数为 n_2 , 那么 n_1 到 n_2 之间的信息数即为添加辅助点后新生成的信息数, 只要把这些信息删除即可, 并把信息最大数回复到原先的信息最大数, 之后循环添加其他辅助点, 如果结论证出, 则输出证明过程, 否则重复以上的删除过程, 直到结论得出或者所有添加辅助点的情况都考虑完为止.

限于篇幅, 删除辅助点及辅助信息的数据结构本文不作叙述.

4 实例

4.1 添加辅助线的实例

如图 4 所示: 在四边形 $ABCD$ 中, 已知条件: E 为 AB 的中点, F 为 BC 的中点, G 为 CD 的中点, H 为 AD 的中点. 求解的问题: $EFGH$ 是平行四边形

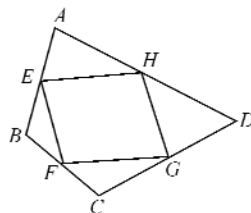


图 4 添加辅助线的实例

Fig. 4 The example of adding auxiliary line

本题在不区分连线的情况下, 认为任意两点间都有连线, 产生的所有信息都参与推理, 因此可以证得结论. 而在区分连线的情况下, 由于部分无连线信息没有参与推理, 故结论无法证得, 因为由中位线定理推出的平行信息都是无连线信息, 无

连线信息放入临时信息库中不参与推理,故得不出平行四边形信息.在得不出结论的前提下,把临时库中的平行信息标记成辅助线重新放入推理库中,继续推理,便可以得出平行四边形结论.

分析如图5所示.

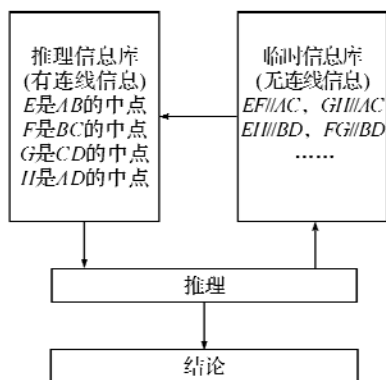


图5 推理过程

Fig. 5 Reasoning process

由于构成中心信息的直线是有连线的已知信息,生成几何信息库的子程序会把题目条件中的四条中点信息,放入推理信息库中参与推理,经过几轮推理后,推理生成平行信息 $EF \parallel AC$, $GH \parallel AC$, $EH \parallel BD$, $FG \parallel BD$, 另外还有其他相等角信息 $\angle BGF = \angle GBD \dots$, 检查这些信息发现构成信息的直线,都存在着没有连接的线,因此放入临时信息库中,当结论得不出时,再把临时信息库中的信息作为辅助线信息放入推理库中.

结论证完后,接下来的工作是提取有用的辅助线.分析如下(图6):

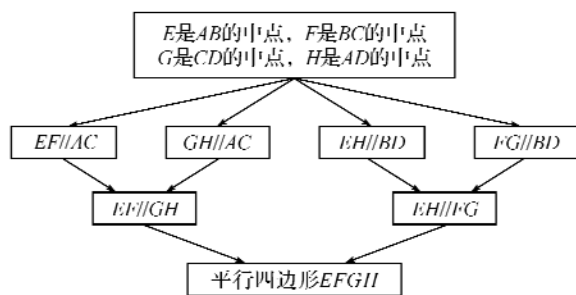


图6 分析过程

Fig. 6 Analysis process

先提取结论平行四边形 $EFGH$, 检查四条边 EF, FG, GH, EH 是否是辅助线,是则保存在辅助线表中,接着提取其他信息,若辅助线已存在辅助线表中,则不再存放,以免添加重复.依次又提取出辅助线 AC, BD . 因此最后辅助线表中的辅助线为 EF, FG, GH, EH, AC, BD , 最后作图系统再把辅助表中的线在图形的恰当位置作出,即可达到与手工添加连线效果完全相同.

本题在区分连线前用 50 s, 推出 7693 条信

息,区分连线后仅用 7 s, 推出 2663 条信息,信息量减少了 4 000 多条,推理速度和效率明显提高.

4.2 添加辅助点的实例

添加中点规律:

(a)根据已知中点添加另一个中点,利用三角形和梯形的中位线定理.

(b)根据等腰三角形添加底边中点,利用等腰三角形的三线合一定理.

(c)根据直角三角形添加斜边中点,利用直角三角形斜边中线性质.

(d)根据一条线段上分成的两条线段间的两倍关系,添加较长线段的中点,构造相等线段.

例:已知: $\triangle BCD$, 如图7, 延长 BC 到 A , 使得 $BC = 2AC$, 取 BD 的中点 E , 连接 AE 与 CD 交于点 F .

求证: $AF = EF$

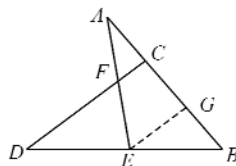


图7 添加辅助点的实例

Fig. 7 The example of adding auxiliary point

由 $BC = 2AC$ 线段倍数关系,添加长边 BC 的中点 G 作为辅助点,从而产生 $AC = CG = GB$ 信息.图8为推理软件系统证明过程的截图.

```

[2, 4] AF=EF(规则 102)
  [26, 18] AE/AG=AG/BG(规则 101)
    [26, 7] AC/AF=AG/AE(规则 86)
      [13, 0] EG//DF(规则 31)
        [11, 0] E是BD的中点(已知)
          [11, 0] G是BC的中点O
            [5, 0] AC=0.500000BC(已知)
              [2, 2] AC=BG(规则 89)
                [5, 0] AC=0.500000BC(已知)
                  [5, 7] BC=0.500000BC(规则 0)
                    [11, 1] G是BC的中点O
                      [5, 0] AC=0.500000BC(已知)
                        [26, 20] AE/AG=EF/BG(规则 101)
                          [26, 9] AE/AG=EF/CG(规则 86)
                            [13, 0] EG//DF(规则 31)
                              [11, 0] E是BD的中点(已知)
                                [11, 0] G是BC的中点O
                                  [5, 0] AC=0.500000BC(已知)
                                    [2, 1] BG=CG(规则 0)
                                      [11, 1] G是BC的中点O
                                        [5, 0] AC=0.500000BC(已知)
  
```

图8 证明过程

Fig. 8 Proving process

5 结 语

上述工作旨在前推式几何信息搜索法实现几何定理机器可读证明的基础上,有效的实现自动添加辅助线和辅助点功能两方面的工作.有选择

的连线两点,限制了信息膨胀,使得传统较复杂图形的几何问题解题效率大大提高,添加辅助点使得计算机解决几何问题能力更加强大,找到了计算机通过添加辅助线和辅助点证明几何问题的一种行之有效的算法,并证明了一批需要添加辅助线和辅助点的几何问题,实现了计算机解决更高智能的几何问题的能力,使得计算机证明几何问题更像人一样具有思维的灵活性和丰富性,更加接近真正意义上的人工智能,同时对开发供教师和学生使用的更高智能的数学工具软件起了一定的参考作用.

参考文献:

- [1] 张景中,杨路,高小山,周成青.几何定理可读证明的自动生成[J]. 计算机学报,1995,18(5):380-393.
- [2] Yang L, Gao X S, Chou S C, et al. Automated proving and discovering of theorems in non-Euclidean geometries[C]// Automated Deduction in Geometry. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1998: 171-188.
- [3] 吴文俊.几何定理机器证明的基本原理[M]. 北京: 科学出版社,1984.
- [4] 张景中.计算机怎样解几何题——谈谈自动推理[M]. 北京:清华大学出版社,暨南大学出版社,2000:1-189.
- [5] 张景中,李传中.自动推理与教育软件智能平台[J]. 广州大学学报,2001,15(2):1-6.
- [6] 张景中,高小山,周成青.基于前推法的几何信息搜索系统[J]. 计算机学报,1996,19(10):721-727.
- [7] Nevins A J. Plane geometry theorem proving using forward chaining[J]. Artificial Intelligence, 1975, 6(1):1-23.
- [8] 李涛.基于前向推理的平面解析几何自动推理系统研究与实现[J]. 计算机应用,2006(7):1717-1720.
- [9] 徐嵩.双向推理系统在初等几何自动解题中的实现[J]. 计算机应用研究,2004,(11):232-234.

Research on adding auxiliary line and auxiliary point in computer automatic reasoning

LI Tao

(Modern Education and Technology Center of South China Agriculture University, Guangzhou 510642, China)

Abstract: People have made great achievements in the field of machine proving for geometry theorems. Using auxiliary line and auxiliary point in proofs is the characteristic of traditional geometry and a high intelligence geometry approach, but it adds great difficulty to geometric proof's mechanization. The author tries to apply auxiliary line and auxiliary point in automatic reasoning system. This method can improve reasoning efficiency in evidence, especially in the solution of some complex elementary geometry problems.

Key words: automated reasoning; automatic solution; auxiliary line; auxiliary point

本文编辑:陈晓苹