文章编号:1674-2869(2009)09-0084-02

数列组的齐次线性相关性

杨建华[1,2]

(1.武汉工程大学理学院,湖北 武汉 430074;
2.武汉工程大学智能机器人湖北省重点实验室,湖北 武汉 430074)

摘 要:提出了数列组的齐次线性相关与齐次线性无关的概念,定义了数列组之间的齐次等价,并讨论数列组的齐次线性相关、数列组之间齐次等价的条件,得到一些有关的结论.

关键词:数列组;齐次线性相关;齐次线性无关;齐次等价
中图分类号:O151;O173 文献标识码:A

1 定 义

定义1[1,2] 如果按某一法则对每一个$n\in N^{+}$都对应着一个确定的实数x_n,这些实数按照下标从小到大排列得到一个序列

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

叫做数列,简记为$\{x_n\}$.

定义2 有限个数列$\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{mn}\}$称为一个数列组.

定义3 给定数列组$A:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{mn}\}$,对任何一组实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,得到数列

$$\{k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}\}$$

简记为 $k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}$

称为数列组A的一个齐次线性组合数列,简称为齐次线性组合,其中$k_1,k_2,\cdots,k_m$称为这个齐次线性组合的系数.

定义4 如果数列$\{y_n\}$为数列组$A:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{mn}\}$的一个齐次线性组合,即存在一组实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$y_n=k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}$$

则称数列$\{y_n\}$可以由数列组A齐次线性表出(或齐次线性表示).

定义5 设$A:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{mn}\}$为一数列组,如果存在一组不全为零的实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}\equiv 0$$

则称这数列A齐次线性相关,否则称数列A齐次线性无关.

显然,(1)如果数列A中含有数列$\{0\}$,即数列中的每一项都等于常数0,数列组A一定齐次线性相关.

(2)数列A齐次线性无关的充分必要条件为:如果存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}\equiv 0$$

则$k_1,k_2,\cdots,k_m$一定全为零,即

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0.$$

定义6 如果数列$A:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{mn}\}$中,存在$r(0\leqslant r\leqslant m)$个数列$\{x_{i_1}n\},\{x_{i_2n},\cdots,\{x_{i_rn}\}\}$满足:

(1)$\{x_{i_1n}\},\{x_{i_2n}\},\cdots,\{x_{i_rn}\}$齐次线性无关;

(2)数列A中的任何一个数列都可以由$\{x_{i_1n}\},\{x_{i_2n}\},\cdots,\{x_{i_rn}\}$齐次线性表出,则称这$r$个数列所构成的数列组$\{x_{i_1n}\},\{x_{i_2n}\},\cdots,\{x_{i_rn}\}$为数列组$A$的一个极大齐次线性无关组,其中$r$称为数列组的秩,记作$R(A)$,即$R(A)=r$.

定义7 设$A:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_mn\}$,$B:\{y_{1n}\},\{y_{2n}\},\cdots,\{y_{sn}\}$为两个数列组,如果数列组$B$中的任一数列都可以由数列组$A$齐次线性表出,则称数列组$B$可以由数列组$A$齐次线性表出.

定义8 设$A:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{mn}\}$,$B:\{y_{1n}\},\{y_{2n}\},\cdots,\{Y_{SN}\}$为两个数列组,如果数列组$A$与$B$可以相互齐次线性表出,则称数列组$A$与$B$齐次等价.

2 定 理

定理1 数列组$A:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{mn}\}$齐次线性相关的充分必要条件为数列组$A$中至少有一个数列可以由其余的数列所构成的数列组齐次线性表出.

证明 (充分性)如果数列A中有某个数列,

收稿日期:2008-09-02
作者简介:杨建华(1959-),男,湖北嘉鱼人,副教授.研究方向:灰色理论及其应用和基础数学.

比如$\{x_{mn}\}$可以由其余的数列齐次线性表出

$$x_{mn}=k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_{m-1}x_{m-1,n}$$

则 $k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_{m-1}x_{m-1,n}-x_{mn}=0$

即数列组 A 线性相关.

(必要性)如果数列组 A 线性相关,则存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,不妨设 $k_m\neq0$,使得

$$k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}=0$$

则 $x_{mn}=-\frac{k_1}{k_m}x_{1n}-\frac{k_2}{k_m x_{2n}}-\cdots-\frac{k_{m-1}}{k_m}x_{m-1,n}$

即数列$\{x_{mn}\}$可以由其余的数列$\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{m-1,n}\}$齐次线性表出.

定理 2　数列组 $A:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{mn}\}$齐次线性相关的充分必要条件为数列组 A 的秩小于,即 $R(A)<m$.

证明　充分性显然,下证必要性.

设数列组 $A:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{mn}\}$齐次线性相关,即存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,不妨设 $k_m\neq0$,使得

$$k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}=0$$

则 $x_{mn}=-\frac{k_1}{k_m}x_{1n}-\frac{k_2}{k_m x_{2n}}-\cdots-\frac{k_{m-1}}{k_m}x_{m-1,n}$

即数列$\{x_{mn}\}$可以由其余的数列$\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{m-1,n}\}$齐次线性表出.而其余的数列当然可以由其自身齐次线性表出,因此,由定义数列组 A 的秩 $R(A)<m$.

推论　数列组 $A:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{mn}\}$齐次线性无关的充分必要条件为它的秩 $R(A)=m$.

定理 3　数列组 $A:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{mn}\}$与其任一个极大齐次线性无关组齐次等价.

证明　不妨设 $A_0:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{rn}\}$为其一个齐次极大线性无关组,显然,数列组 A_0 可以由数列组 A 齐次线性表出,反过来,由定义 6 知,数列组 A 可以由 A_0 齐次线性表出,所以 A 与 A_0 齐次等价,即数列组 A 与其一个齐次极大线性无关组等价.

定理 4　数列组 $B:\{y_{1n}\},\{y_{2n}\},\cdots,\{y_{sn}\}$可以由数列组 $A:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{mn}\}$齐次线性表出的充分必要条件是 A 的秩等于由 A 组和 B 组所构成的新的数列组 $C:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{mn}\}$ $\{y_{1n}\},\{y_{2n}\},\cdots,\{y_{sn}\}$的秩,即 $R(A)=R(C)=R(A,B)$

证明　设 $A_0:\{x_{i_1n}\},\{x_{i_2,n}\},\cdots,\{x_{i_rn}\}$为数列组 A 的一个极大齐次线性无关组.

充分性:由 $R(A)=R(C)=R(A,B)$ 知,A_0 也为 C 的一个极大齐次线性无关组,所以,C 中的任一数列都可以由 A_0 齐次线性表出,由此可知数列组 B 中的任一数列都可以由 A_0 齐次线性表出,进而可以由数列组 A 齐次线性表出.

必要性:设数列组 B 可以由数列组 A 齐次线性表出,而数列组 A 可以由 A_0 齐次线性表出,因此数列组 C 可以由 A_0 齐次线性表出,所以,A_0 为数列组 C 的一个极大齐次线性无关组,所以 C 的秩等于数列组 A 的秩,即 $R(A)=R(C)=R(A,B)$.

定理 5　如果数列组 $B:\{y_{1n}\},\{y_{2n}\},\cdots,\{y_{sn}\}$可以有数列组 $A:\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots,\{x_{mn}\}$齐次线性表出,则数列组 B 的秩不超过数列组 A 的秩,即 $R(B)\leqslant R(A)$.

证明　由定理 4 有 $R(A)=R(A,B)$,而 $R(B)\leqslant R(A,B)$,所以 $R(B)\leqslant R(A)$.

定理 6　如果数列组 A 与数列组 B 齐次等价,则 A 的秩等于 B 的秩,即 $R(A)=R(B)$.

证明　由定理 5 及数列组齐次等价的定义即知结论成立.

定理 7　齐次线性相关的两个数列的敛散性相同.

3　例　题

例 1　数列组 $A:\{n\},\{2n\},\{3n\}$齐次线性相关,数列$\{n\}$为 A 一个极大齐次线性无关组,同样数列$\{2n\}$和$\{3n\}$也分别都是 A 的极大齐次线性无关组.

例 2　证明数列组 $A:\{n\},\{n^2\}$齐次线性无关.

证明　如果存在一组数 k_1,k_2,使得

$$k_1n+k_2n^2=0$$

则分别取 $n=1,n=2$,得方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2=0\\2k_1+4k_2=0\end{cases}$$

其只有零解,$k_1=k_2=0$,所以数列组 A 齐次线性无关.

例 3　数列组 $A:\left\{n^2+\frac{1}{n}\right\},\left\{n^2-\frac{1}{n}\right\}$线性无关,且都没有极限,但

$$\left(n^2+\frac{1}{n}\right)-\left(n^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{n}$$

有极限为 0.

参考文献:

[1]　同济大学应用数学系.高等数学(第五版)上册[M].北京:高等教育出版社,2002.

[2]　江泽坚,吴志泉,周光亚.数学分析上册[M].北京:人民教育出版社,1978.

(下转第 88 页)

$\left\{(z,\vec{\theta}): \frac{1}{n}\lim\sum_{k=0}^{n-1}P^k(\vec{\theta};z,x)>0\right\}$ 不依赖于 μ 的选择，命题得证.

参考文献：

[1] Cogburn R. The Ergodic Theory of Markov Chains in Random Eanvidom Environments[J]. Z Wahrsch Verw Gebiete 1984,66:129－128.

[2] Cogburn R. On Direct Convergence and Peoriodicity for Transition Probabilities of Markov Chains in Random Environments[J]. Ann Prob 1990,18(2): 642－654.

[3] Orey S. Markov Chains with Stochastically stationary Transition Probability [J]. Ann Prob 1991,19(3):907－928.

[4] Hu Di-he. The Relations Among Various Markov Chains[J]. Wuhan Univ(Nat Sci Ed),2001,6(3): 643－648.

[5] Meyn S P, Tweedie R L. Markov Chains and Stochastic Stability [M]. London: Springer-verlag Press. 1993.

[6] 郭光耀. 随机环境马氏链的 φ－不可约性[J]. 武汉化工学院学报,2006,28(4):80－82.

The properties of invariant measure on Ψ-irreducibility of random environments markov chain

YANG Xue－fan*, *GUO Guang－yao

(School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: In this paper, let $\{\vec{X}\}$ be Markov Chains in random environments with countable State space. In this paper, author introduces the Hopf Markov Chains and skew product Markov Chains, and defines φ-irreducibility and Ψ-irreducibility on Markov Chains in random environments. Furthermore, the author investigates the properties of invariant measure and subinvariant measure in Ψ-irreducibility, and obtains necessary and sufficient condition about invariant measure and subinvariant measure.

Key words: φ-irreducibility; markov chains in random environments; Ψ-irreducibility; invariant measure; subinvariant measure

本文编辑：萧 宁

(上接第 85 页)

Homogeneous linear correlation of sequence group

YANG Jian-hua [1,2]

(1. School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China;
2. Hubei Province Key Laboratory of Intelligent Robot, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: The concepts of homogeneous linear correlation and homogeneous linear independence were proposed in this paper. The homogeneous equivalence of sequence group was defined, and the condition for homogeneous linear correlation and homogeneous equivalence was discussed, then the relevant result was acquired.

Key words: sequence group; homogeneous linear correlation; homogeneous linear independence; homogeneous equivalence

本文编辑：萧 宁