文章编号：1674－2869(2009)09－0086－03

# 随机环境马氏链的 Ψ 一不可约下不变测度性质

杨雪帆[1]，郭光耀[2]
（武汉工程大学理学院，湖北 武汉 430074）

摘　要：假设 $\vec{X}$ 是随机环境的马氏链，在 Hopf 马氏链及绕积马氏链的基础上，定义了随机环境马氏链 $\varphi$ 不可约性．利用绕积马氏链，得到了 $\varphi$—不可约性的，并进一步讨论了最大不可约测度 $\Psi$，及 $\Psi$—不可约性的．在 $\Psi$—不可约下讨论不变测度、次不变测度的性质，得到了有关不变测度、次不变测度的判别的充要条件．

关键词：$\varphi$　不可约性；随机环境马氏链；$\Psi$　不可约性；不变测度；次不变测度
中图分类号：O211.62　　文献标识码：A

## 1　引言及符号

设 $X$ 为任一可数无穷集或有限集，$A$ 为 $X$ 的一切子集，于是有可测空间 $(X,A)$．再设 $(\Theta,B_0)$ 是任一可测空间。令 $Z=\{0,\pm1,\cdots\}$ 为整数集，$N=Z_+=\{0,1,2,\cdots\}$ 为非负整数集 $\Omega=\Theta^Z$．

$\Theta_n:\Omega\to\Theta$ 为坐标函数 $(n\in Z)$．$B_k^l\triangleq\sigma(\Theta_n,k-1<n<l+1)(-\infty\leqslant k\leqslant l\leqslant\infty)$，$B=B_{-\infty}^{+\infty}$．令 $T:\Omega\to\Omega$ 为推移算子，即对任何 $\vec{\theta}=(\theta_n,n\in N)\in\Omega$，$T(\vec{\theta})=(\vec{\theta}')$，$\theta_n'=\theta_{n+1}$，$\forall n\in Z$．令 $\pi$ 为可测空间上任一概率测度，且满足 $\pi\circ T^{-1}=\pi$．于是 $\{\Theta_n,n\in Z\}$ 是概率空间 $(\Omega,B,\pi)$ 上的取值于 $\Theta$ 的严平稳序列．

Cogburn 分别在文献[1]中讨论了随机环境的马氏链，并和其他学者对随机环境马氏链作了讨论。参见文献[1～6]，本文所有的符号和定义参见[1～3]，下面定义本文中用到的几个常见的特征数：

$$L((x,\vec{\theta});F)=P_{(x,\vec{\theta})}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n,T_n\vec{\xi})\in F\right\}$$

$$Q((x,\vec{\theta});F)=P_{(x,\vec{\theta})}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}(X_n,T_n\vec{\xi})\in F\right\}$$

$$G((x,\vec{\theta});F)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{y\in X}P^n(\vec{\theta};x,y)l_{(F)_y}(T^n\vec{\xi})$$

$$F^{(n)}((x,\vec{\theta});F)=P_{(x,\vec{\theta})}(\tau_F=n),$$

其中 $\tau_F$ 表示首次到达集合 $F$ 的时刻．

$$K_{a_\varepsilon}((x,\vec{\theta});F)=(1-\varepsilon)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^nP^n((x,\vec{\theta});F)$$

$$U((x,\vec{\theta});F)=\sum_{n=0}^{\infty}P^n((x,\vec{\theta});F).$$

## 2　φ一不可约的定义及最大不可约测度 Ψ 的存在性

**定义 1**　设 $\varphi$ 是 $\varepsilon$ 上的一个测度，称 $\vec{X}$ 是 $\varphi$—不可约的，只要 $\varphi(F)>0$，总有，对 $\prod a.e(x,\vec{\theta})\in E$，$L((x,\vec{\theta});F)>0$．

可以得到下面性质，如果 $\vec{X}$ 对一些 $\sigma$ 有限测度 $\varphi$，是 $\varphi$—不可约的，则存在 $\varepsilon$ 上的测度 $\Psi$，$\vec{X}$ 是 $\Psi$　不可约的；且对任意其他测度 $\varphi'$，$\vec{X}$ 是 $\varphi'$　不可约，当且仅当 $\Psi\gg\varphi'$，所以可以定义．

**定义 2**　称上面的概率测度 $\Psi$ 是最大不可约测度，称链 $\vec{X}$ 是 $\Psi$ 一不可约，如果它存在一些测度 $\varphi$ 是 $\varphi$—不可约且 $\Psi$ 是最大不可约测度．

## 3　Ψ—不可约下次不变测度及不变测度的性质

**定义 3**　称 $\mu$ 为次不变测度，且满足，

$$\mu(A)\geqslant\int_E\mu(\mathrm{d}(x,\vec{\theta})P((x,\vec{\theta});A)),A\in\varepsilon.$$

称 $\mu$ 为不变测度，若

$$\mu(A)=\int_E\mu(\mathrm{d}(x,\vec{\theta})P((x,\vec{\theta});A)),A\in\varepsilon.$$

一般而言，次不变测度并不一定是不变测度，对不变测度成立的性质次不变测度并不一定成立，但如果 $\vec{X}$ 是 $\Psi$—不可约的，则有下面的性质．

**主要定理**　如果 $\vec{X}$ 是 $\Psi$—不可约的，$\mu$ 是任一测度，且 $\mu(E)<\infty$，则 $\mu$ 是次不变测度的充要条件为存在 $\Lambda\in E$，使得 $\prod\left\{\Lambda:\lim\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k\right.$

收稿日期：2008－10－14
作者简介：杨雪帆(1976－)，女，硕士，讲师．研究方向：概率与统计．

$(\vec{\theta};x,x)>0\Big\}>0$. 并且 $\Psi\ll\mu$.

证明:先证明必要性,实际上,$\mu(E)<\infty$,故存在 $\mu(\Lambda)\in E$,使得 $\mu(\Lambda)<\infty$.

又 $\mu$ 是次不变测度,则有,

$$\mu(\Lambda)\geqslant\int_E\mu(\mathrm{d}(x,\vec{\theta})P((x,\vec{\theta});\Lambda)),\Lambda\in\varepsilon.$$

下面证明等号成立,否则的话,

$$\mu(\Lambda)\geqslant\int_E\mu(\mathrm{d}(x,\vec{\theta})P((x,\vec{\theta});\Lambda)).$$

则 $\mu(E)=\mu(\Lambda)+(\Lambda^C)\geqslant$

$$\int_E\mu(\mathrm{d}(x,\vec{\theta})P((x,\vec{\theta});A))+$$

$$\int_E\mu(\mathrm{d}(x,\vec{\theta}))P((x,\vec{\theta});A^C)=$$

$$\int_E\mu(\mathrm{d}(x,\vec{\theta}))P((x,\vec{\theta});E)=$$

$$\int_E\mu(\mathrm{d}(x,\vec{\theta}))=\mu(E)$$

所以,如果 $\mu(E)<\infty$,则可得矛盾,即 $\mu$ 是不变测度.

对不变测度 $\mu$,设其密度函数为 $\varphi$,则 $F_0=\{\varphi>0\}$为闭集.否则的话,存在$(x,\vec{\theta})\in F_0$,$(y,T\vec{\theta})\notin F_0$,使 $P((x,\vec{\theta});(y,t\vec{\theta}))>0$.再由 $\varphi(x,\vec{\theta})>0$ 及不变测度的性质有:$\varphi(y,T,\vec{\theta})=\varphi P(y,T\vec{\theta})$,又由马氏性,有

$$\varphi P(y,T\vec{\theta})=\sum_{z\in X}\varphi(z,\vec{\theta})P((z,\vec{\theta});$$

$$(y,T\vec{\theta}))>\varphi(x,\vec{\theta})P((x,\vec{\theta})P((x,\vec{\theta});$$

$$(y,T\vec{\theta}))>0,$$

与$(y,T\vec{\theta})\notin F_0$ 矛盾,故 $F_0$ 为闭集.

又取 $f=1_{\{x\}\times\Omega}$,则,由 $P^kf(z,\vec{\theta})=P^k(\vec{\theta};z,x)$,文献[3]P911 定理可得 $\lim\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k(\vec{\theta};z,x)=\mu\{1_{\{x\}\times\Omega}(z,\vec{\theta})\}$,取 $A=\{(x,\vec{\theta}:\mu\{1_{\{x\}\times\Omega}(z,\vec{\theta})\}=0\}$.

则由 $\mu$ 的不变测度性可得

$$\int_{(\Lambda)x}\varphi(x,\vec{\theta})\pi(d,\vec{\theta})=\mu(\{x\}\times\Omega)=$$

$$\int_\Lambda 1_{\{x\}\times\Omega}\mathrm{d}\mu=0$$

由 $F_0=\{\varphi>0\}$ 得 $\Lambda\subset F_0^C$,亦即 $F_0\subset\Lambda^C$,

即 $F_0\subset\left\{\lim\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k((x,\vec{\theta}),x)>0\right\}$.

故 $\forall(x,\vec{\theta})\in F_0$,有 $\lim\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k(\vec{\theta};x,x)>0$.从而,

$$\left\{(x,\vec{\theta})\in F_0:\lim\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k(\vec{\theta});x,x)>0\right\}=F_0$$

因为 $F_0=\{\varphi>0\}$,$\mu\ll\prod$ 及 $\mu(F_0)>0$,所以 $\prod(F_0)>0$,而

$$\left\{(x,\vec{\theta})\in F_0:\lim\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k(\vec{\theta});x,x)>0\right\}\subset$$

$$\left\{(x,\vec{\theta})\in A:\lim\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k(\vec{\theta});x,x)>0\right\}$$

故 $\prod\left\{(x,\vec{\theta})\in\Lambda:\lim\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k(\vec{\theta});x,x)>0\right\}>0$.必要性得证.

下面证明充分性.

反过来,若

$$\prod\left\{(x,\vec{\theta})\in A:\lim\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k(\vec{\theta});x,x)>0\right\}>0,\text{则}$$

$$\prod\left\{(x,\vec{\theta})\in A:\sup_y\limsup_n\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k(\vec{\theta});x,x)>0\right\}>0,$$

由文献[4]P913 定理可得,$E$ 上的不变测度族非空,而不变测度一定是次不变测度,所以一定存在次不变测度 $\mu$.

充要性得证.

下面证明 $\Psi\ll\mu$,实际上:

假设 $\forall A\in M$,若 $\Psi(A)>0$,故由 $\Psi$—不可约性得,$\forall(x,\vec{\theta})\in E$,总有 $K_{a_{\frac{1}{2}}}((x,\vec{\theta});E)>0$,又由次不变测度性质得

$$\mu(A)\geqslant\int_E\mu(\mathrm{d}(y,\vec{\theta}'))P((y,\vec{\theta}');A)\cdots\geqslant$$

$$\int_E\mu(\mathrm{d}(x,\vec{\theta}'))P^n((x,\vec{\theta});\Lambda).$$

即 $\left(\frac{1}{2}\right)\mu(A)\geqslant\int_E\mu(\mathrm{d}(x,\vec{\theta}'))\left(\frac{1}{2}\right)^nP^n((x,\vec{\theta});A)$.

对 $n$ 从 0 到 $\infty$ 求和得 $\mu(A)\geqslant\int_E\mu(\mathrm{d}(x,\vec{\theta}'))K_{a_{\frac{1}{2}}}((x,\vec{\theta});\Lambda)$,又由 $K_{a_{\frac{1}{2}}}((x,\vec{\theta});E)>0$,及$(x,\vec{\theta})$ 的任意性得$\int_E\mu(\mathrm{d}(x,\vec{\theta}'))K_{a_{\frac{1}{2}}}((x,\vec{\theta});A)>0$,故 $\Psi(A)>0$,则 $\mu(A)>0$.此即 $\Psi\ll\mu$.

推论　对于如果 $\vec{X}$ 是 $\Psi$—不可约的,$\mu$ 是任一不变测度,其密度函数为 $\varphi$,则 $F=\{\varphi>0\}$不依赖于 $\mu$ 的选择.

证明:取 $f=1_{\{x\}\times\Omega}$,

则 $P^kf(z,\vec{\theta})=P^k(\vec{\theta},z,x)$,

$\mu(F)=\int_e\varphi(x,\vec{\theta})\mathrm{d}(x,\vec{\theta})>0$,且 $\mu\{f(x,\vec{\theta})\}=\mu(A)$,$(x,\vec{\theta})\in A$.

由文献[3]P911 定理可得,对于不同的 $\mu$,$F=$

$\left\{(z,\vec{\theta}):\frac{1}{n}\lim\sum_{k=0}^{n-1}P^{k}(\vec{\theta};z,x)>0\right\}$ 不依赖于 $\mu$ 的选择，命题得证.

参考文献：

[1] Cogburn R. The Ergodic Theory of Markov Chains in Random Eanvidom Environments[J]. Z Wahrsch Verw Gebiete 1984,66:129－128.

[2] Cogburn R. On Direct Convergence and Peoriodicity for Transition Probabilities of Markov Chains in Random Environments[J]. Ann Prob 1990,18(2):642－654.

[3] Orey S. Markov Chains with Stochastically stationary Transition Probability [J]. Ann Prob 1991,19(3):907－928.

[4] Hu Di-he. The Relations Among Various Markov Chains[J]. Wuhan Univ(Nat Sci Ed),2001,6(3):643－648.

[5] Meyn S P, Tweedie R L. Markov Chains and Stochastic Stability [M]. London: Springer-verlag Press. 1993.

[6] 郭光耀. 随机环境马氏链的 φ－不可约性[J]. 武汉化工学院学报,2006,28(4):80－82.

## The properties of invariant measure on $\Psi$-irreducibility of random environments markov chain

*YANG Xue－fan*, *GUO Guang－yao*

(School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract**: In this paper, let $\{\vec{X}\}$ be Markov Chains in random environments with countable State space. In this paper, author introduces the Hopf Markov Chains and skew product Markov Chains, and defines $\varphi$-irreducibility and $\Psi$-irreducibility on Markov Chains in random environments. Furthermore, the author investigates the properties of invariant measure and subinvariant measure in $\Psi$-irreducibility, and obtains necessary and sufficient condition about invariant measure and subinvariant measure.

**Key words**: $\varphi$-irreducibility; markov chains in random environments; $\Psi$-irreducibility; invariant measure; subinvariant measure

本文编辑：萧 宁

(上接第 85 页)

## Homogeneous linear correlation of sequence group

*YANG Jian-hua*[1,2]

(1. School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China;
2. Hubei Province Key Laboratory of Intelligent Robot, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract**: The concepts of homogeneous linear correlation and homogeneous linear independence were proposed in this paper. The homogeneous equivalence of sequence group was defined, and the condition for homogeneous linear correlation and homogeneous equivalence was discussed, then the relevant result was acquired.

**Key words**: sequence group; homogeneous linear correlation; homogeneous linear independence; homogeneous equivalence

本文编辑：萧 宁