文章编号:1674-2869(2009)12-0079-03

数列组的广义线性相关性

杨建华[1,2]
(1.武汉工程大学理学院,湖北 武汉 430074;
2.武汉工程大学智能机器人湖北省重点实验室,湖北 武汉 430074)

摘 要:本文将数列组的齐次线性相关与齐次线性无关,以及数列组之间的齐次等价的概念加以引伸提出了数列组的广义线性相关与广义线性无关、数列组之间广义等价等概念,探讨广义线性相关、广义线性无关的条件,并得到一些有关的结论.

关键词:数列组;广义线性相关;广义线性无关;广义等价
中图分类号:O151;O173 文献标识码:A

1 问题的提出

文献[1]中给出了数列组的齐次线性相关性,但其具有很大的局限性,例如数列组 A: $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2n}+1\right\}$ 显然有很强的线性相依关系,但此数列组不是齐次线性相关的.为此,我们有必要将齐次线性相关的概念加以延伸,使之具有更广泛的适应性.

2 定 义

定义 1[2-3] 如果按某一法则对每一个 $n\in N^+$ 都对应着一个确定的实数 x_n,这些实数按照下标从小到大排列得到一个序列

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

叫做数列,简记为$\{x_n\}$.

定义 2 有限个数列$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,$\cdots$,$\{x_{mn}\}$称为一个数列组.

定义 3 给定数列组 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,$\cdots$,$\{x_{mn}\}$,对任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 以及常数 a,数列

$$\{k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}+a\}$$

简记为 $k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}+a$

称为数列组 A 的一个广义线性组合数列,其中 k_1,k_2,$\cdots$,k_m 称为这个线性组合的系数.当 $a=0$ 时,称为齐次线性组合;当 $a\neq 0$ 时,称为非齐次线性组合.

定义 4 如果数列$\{y_n\}$为数列组 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,$\cdots$,$\{x_{mn}\}$的一个广义线性组合,即存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,以及常数 a,使得

$$y_n=k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}+a$$

则称数列$\{y_n\}$可以由数列组 A 广义线性表出(或广义线性表示).当 $a=0$ 时,称数列$\{y_n\}$可以由数列组 A 齐次线性表出(或齐次线性表示);当 $a\neq 0$ 时,称数列$\{y_n\}$可以由数列组 A 非齐次线性表出(或非齐次线性表示).

定义 5 设 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,$\cdots$,$\{x_{mn}\}$为一数列组,如果存在一组不全为零的实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,以及常数 a,使得

$$k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}+a\equiv 0$$

则称这数列 A 广义线性相关.当 $a=0$ 时,称这数列 A 齐次线性相关;当 $a\neq 0$ 时,称这数列 A 非齐次线性相关.否则称数列 A 广义线性无关.

显然,(1) 如果数列 A 中含有数列$\{c\}$,即数列中的每一项都等于常数 c,数列组 A 一定广义线性相关.

(2) 数列 A 广义线性无关的充分必要条件为:对任意常数 a,如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}+a\equiv 0$$

则 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 一定全为零,即 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$.

进而有数列 A 广义线性无关的充分必要条件为:如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}\equiv 0$$

则 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 一定全为零,即 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$.因此有

(3) 广义线性无关的数列组一定齐次线性无关.

收稿日期:2008-09-02
作者简介:杨建华(1959-),男,湖北嘉鱼人,副教授.研究方向:灰色理论驻其应用和基础数学.

(4) 齐次线性相关的数列组一定广义线性相关.

定义6 如果数列数列 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{mn}\}$中,存在 $r(0\leqslant r\leqslant m)$个数列$\{x_{i_1n}\}$,$\{x_{i_2n}\}$,…,$\{x_{i_rn}\}$满足:

(1) $\{x_{i_1n}\}$,$\{x_{i_2n}\}$,…,$\{x_{i_rn}\}$广义线性无关;

(2) 数列 A 中的任何一个数列都可以由$\{x_{i_1n}\}$,$\{x_{i_2n}\}$,…,$\{x_{i_rn}\}$广义线性表出,则称这 r 个数列所构成的数列组$\{x_{i_1n}\}$,$\{x_{i_2n}\}$,…,$\{x_{i_rn}\}$为数列组 A 的一个广义极大线性无关组,其中 r 称为数列组的秩,记作 $R(A)$,即 $R(A)=r$.

定义7 设 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{mn}\}$,B:$\{y_{1n}\}$,$\{y_{2n}\}$,…,$\{y_{sn}\}$为两个数列组,如果数列组 B 中的任一数列都可以由数列组 A 广义线性表出,则称数列组 B 可以由数列组 A 广义线性表出.

定义8 设 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{mn}\}$,B:$\{y_{1n}\}$,$\{y_{2n}\}$,…,$\{y_{sn}\}$为两个数列组,如果数列组 A 与 B 可以相互广义线性表出,则称数列组 A 与 B 广义等价.

3 定 理

定理1 数列组 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{mn}\}$广义线性相关的充分必要条件为数列组 A 中至少有一个数列可以由其余的数列所构成的数列组广义线性表出.

证明 (充分性)如果数列 A 中有某个数列,比如可以由其余的数列广义线性表出

$$x_{mn}=k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_{m-1}x_{m-1,n}+a$$

则

$$k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_{m-1}x_{m-1,n}-x_{mn}+a=0$$

即数列组 A 广义线性相关.

(必要性)如果数列组 A 广义线性相关,则存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,不妨设 $k_m\neq0$,以及常数 a,使得

$$k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}+a\equiv0$$

则

$$x_{mn}=-\frac{k_1}{k_m}x_{1n}-\frac{k_2}{k_mx_{2n}}-\cdots-\frac{k_{m-1}}{k_m}x_{m-1,n}-\frac{a}{k_m}$$

即数列$\{x_{mn}\}$可以由其余的数列$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{m-1,n}\}$广义线性表出.

定理2 数列组 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_m\}$广义线性相关的充分必要条件为数列组 A 的秩小于,即 $R(A)<m$.

证明 充分性显然,下证必要性.

设数列组 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{mn}\}$广义线性相关,即存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,不妨设$k_m\neq0$,以及常数 a 使得

$$k_1x_{1n}+k_2x_{2n}+\cdots+k_mx_{mn}+a=0$$

则

$$x_{mn}=-\frac{k_1}{k_m}x_{1n}-\frac{k_2}{k_mx_{2n}}-\cdots-\frac{k_{m-1}}{k_m}x_{m-1,n}-\frac{a}{k_m}$$

即数列$\{x_{mn}\}$可以由其余的数列$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{m-1,n}\}$广义线性表出.而其余的数列当然可以由其自身广义线性表出,因此,由定义数列组 A 的秩 $R(A)<m$.

推论 数列组 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{mn}\}$广义线性无关的充分必要条件为它的秩 $R(A)=m$.

定理3 数列组 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{mn}\}$与其任一个广义极大线性无关组等价.

证明 不妨设 A_0:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_m\}$为其一个广义极大线性无关组,显然,数列组可以由数列组 A_0 广义线性表出,反过来,由定义6可知,数列组 A 可以由 A_0 广义线性表出,所以 A 与 A_0 广义等价,即数列组 A 与其一个广义极大线性无关组等价.

定理4 数列组 B:$\{y_{1n}\}$,$\{y_{2n}\}$,…,$\{y_{sn}\}$可以由数列组 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{mn}\}$线性表出的充分必要条件是 A 的秩等于由 A 组和 B 组所构成的新的数列组 C:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{mn}\}$$\{y_{1n}\}$,$\{y_{2n}\}$,…,$\{y_{sn}\}$的秩,即 $R(A)=R(C)=R(A,B)$.

证明 设 A_0:$\{x_{i_1n}\}$,$\{x_{i_2n}\}$,…,$\{x_{i_rn}\}$为数列组 A 的一个广义极大线性无关组.

充分性:由 $R(A)=R(C)=R(A,B)$知,A_0也为 C 的一个广义极大线性无关组,所以,C 中的任一数列都可以由 A_0 广义线性表出,由此可知数列组 B 中的任一数列都可以由 A_0 广义线性表出,进而可以由数列组 A 广义线性表出.

必要性:设数列组 B 可以由数列组 A 广义线性表出,而数列组 A 可以由 A_0 广义线性表出,因此数列组 C 可以由 A_0 广义线性表出,所以,A_0 为数列组 C 的一个广义极大线性无关组,所以 C 的秩等于数列组 A 的秩,即 $R(A)=R(C)=R(A,B)$.

定理5 如果数列组 B:$\{y_{1n}\}$,$\{y_{2n}\}$,…,$\{y_{sn}\}$可以由数列组 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{mn}\}$广义线性表出,则数列组 B 的秩不超过数列组 A 的秩,即 $R(B)\leqslant R(A)$.

证明 由定理4有 $R(A)=R(A,B)$,而 $R(B)\leqslant R(A,B)$,所以 $R(B)\leqslant R(A)$.

定理6 如果数列组 A 与数列组 B 广义等价,则 A 的秩等于 B 的秩,即 $R(A)=R(B)$.

由定理5及数列组广义等价的定义即知结论成立.

定理7 广义线性相关的两个数列的敛散性

相同.

定理8 如果数列组A广义线性相关,且A中的任一数列都是收敛的,则它的任一广义线性组合也是收敛的,且收敛于数列极限的相同广义线性组合.

4 例 题

例1 数列组A:$\{n\}$,$\{2n\}$,$\{3n+1\}$广义线性相关,数列$\{n\}$为A一个广义极大线性无关组,同样数列$\{2n\}$和$\{3n+1\}$也分别都是A的广义极大线性无关组.

例2 证明数列组A:$\{n\}$,$\{n^2\}$广义线性无关.

证明 如果存在一组数k_1,k_2,以及常数a使得

$$k_1 n+k_2 n^2+a=0$$

则分别取$n=1$,$n=2$,$n=3$,得方程组

$$\begin{cases} k_1+k_2+a=0 \\ 2k_1+4k_2+a=0 \\ 3k_1+9k_2+a=0 \end{cases}$$

其只有零解,$k_1=k_2=0$,($a=0$),所以数列组A广义线性无关.

例3 数列组A:$\left\{\frac{1}{n}\right\}$,$\left\{\frac{1}{2n}+1\right\}$广义线性相关,且分别有极限0和1,它的任一线性组合

$$k_1\frac{1}{n}+k_2\left(\frac{1}{2n}+1\right)+a$$

也收敛,且有极限$0k_1+1k_2+a=k_1+a$.

例4 数列组A:$\left\{n^2+\frac{1}{n}\right\}$,$\left\{n^2-\frac{1}{n}\right\}$线性无关,且都没有极限,但

$$\left(n^2+\frac{1}{n}\right)-\left(n^2-\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{n}$$

有极限为0.

参考文献:

[1] 杨建华.数列组的齐次线性相关性[J].武汉工程大学学报,2009,31(9):81-82.

[2] 同济大学应用数学系.高等数学第五版上册[M].北京:高等教育出版社,2002.

[3] 江泽坚,吴志泉,周光亚.数学分析(上册)[M].北京:人民教育出版社,1978.

Non-homogeneous linear correlation of sequence group

YANG Jian-hua[1,2]

(1. School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China;

2. Hubei Province Key Laboratory of Intelligent Robot, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: In this paper, the concepts of homogeneous linear correlation and homogeneous linear independence, and homogeneous equivalence of sequence group are extended to such concepts as generalized linear correlation and generalized linear independence, generalized equivalence in sequence group. The condition for generalized linear correlation and generalized linear independence is discussed, and the relevant result is acquired.

Key words: sequence group; generalized linear correlation; generalized linear independence; generalized equivalence

本文编辑:萧 宁