第 32 卷第 1 期　　　　武　汉　工　程　大　学　学　报　　　　Vol. 32　No. 1
2010 年 01 月　　　　J.　Wuhan　Inst.　Tech.　　　　Jan.　2010

文章编号：1674－2869(2010)01－0104－03

任意多边形平面载流线圈磁场的空间分布

岑敏锐

（武汉工程大学理学院，湖北 武汉 430074）

摘　要：根据一段载流直导线在空间某点的磁场矢量公式，将多边形载流线圈视为多段载流导线，然后根据场强叠加原理，给出了计算任意多边形平面载流线圈在空间任意点的磁场分布的方法，并且运用这种方法求出了菱形平面载流线圈空间磁场分布的普遍表达式.

关键词：多边形平面载流线圈；场强叠加原理；空间磁场分布

中图分类号：O441　　　文献标识码：A　　　**doi**：10.3969/j.issn.1674-2869.2010.01.030

0　引　言

载流线圈空间磁场分布的计算是电磁学中的一个常见问题，在各种形状的载流线圈中，具有轴对称性的圆形载流线圈研究得比较多[1-5]，而对不具有轴对称性的多边形载流线圈的磁场问题则研究得很少，且仅限于一些特殊的多边形[6-8]. 本文根据一段载流直导线在空间某点的磁场矢量公式，将多边形载流线圈视为多段载流导线，然后根据场强叠加原理，给出了求任意多边形平面载流线圈在空间任意点的磁场分布的方法，并且运用这种方法求出了任意多边形平面载流线圈磁场的空间分布的普遍表达式.

1　一段载流直导线在空间某点的磁场矢量公式

如图 1 所示，一段载流直导线在空间某点 P 处产生的磁感应强度 B 的大小为：

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2) \qquad (1)$$

B 的方向与电流的方向成右手螺旋关系.

如果只需要求一段载流直导线的磁场分布，根据(1)式，只要知道电流强度 I，P 点到导线的垂直距离 r_0，导线与导线端点到 P 点连线的夹角 θ_1 和 θ_2，就可以进行求解. 但如果需要求的磁场分布是由多段载流直导线组成的多边形载流线圈所产生的，由于磁感应强度是矢量，而(1)式只考虑了大小，在求空间某点 P 处的总磁感应强度时，有必要将其改写为矢量式.

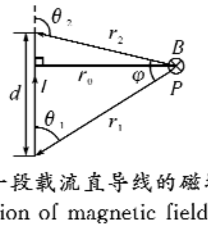

图 1　一段载流直导线的磁场分布

Fig. 1　Distribution of magnetic field generated by a current straight wire

设图 1 中载流直导线的长度为 d，从 P 点指向导线两端点的矢量分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$，则点 P 处的磁感应强度的方向和 $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$ 矢量的方向相同. 考虑方向后，(1)式中的磁感应强度可以写成矢量式(2).

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)}{4\pi r_0|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|}(\cos\theta_1-\cos\theta_2) \qquad (2)$$

设 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 之间的夹角为 φ，则 $|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|=r_1r_2\sin\varphi$，$r_0=\frac{r_1r_2\sin\varphi}{d}$. 将 $|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|$ 和 r_0 代入式(2)中得：

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 Id(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)}{4\pi r_1^2r_2^2\sin^2\varphi}(\cos\theta_1-\cos\theta_2) \qquad (3)$$

根据三角形的余弦定理得：

$$\cos\theta_1=\frac{r_1^2+d^2-r_2^2}{2r_1d} \qquad (4)$$

$$\cos\theta_2=-\cos(\pi-\theta_2)=-\frac{r_2^2+d^2-r_1^2}{2r_2d} \qquad (5)$$

$$\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi=1-\frac{(r_1^2+r_2^2-d^2)^2}{4r_1^2r_2^2} \qquad (6)$$

将(4)式、(5)式和(6)式代入(3)式中得：

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)}{4\pi\left[r_1^2r_2^2-\left(\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2}\right)^2\right]}\times\left(\frac{r_1^2+d^2-r_2^2}{2r_1}+\frac{r_2^2+d^2-r_1^2}{2r_2}\right) \qquad (7)$$

收稿日期：2009－05－08

作者简介：岑敏锐(1971－)，男，湖北浠水人，硕士，讲师. 研究方向：大学物理的教学与研究.

如图 2 所示，载流直导线 P_1P_2 位于 Oxy 平面之内，从空间某点 $P(x,y,z)$ 指向 $P_1(x_1,y_1,0)$ 和 $P_2(x_2,y_2,0)$ 的矢量分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$.

式(7)中矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 以及导线长度 d 分别为：

$$\boldsymbol{r}_1=(x_1-x)\boldsymbol{i}+(y_1-y)\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{r}_2=(x_2-x)\boldsymbol{i}+(y_2-y)\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k} \tag{9}$$

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \tag{10}$$

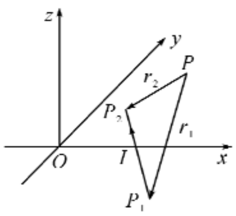

图 2　OXY 平面内一段载流直导线的磁场分布

Fig. 2　Distribution of magnetic field generated by a current straight wire in the OXY plane

将(8)、(9)和(10)式代入(7)式中得：

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)}{4\pi R}\left(\frac{D_1}{r_1}+\frac{D_2}{r_2}\right) \tag{11}$$

(11)式即为要求的一段载流直导线在空间某点的磁场矢量公式. 其中，R、D_1 和 D_2 分别为：

$$R=[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]z^2+[(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+(x_1y_2-x_2y_1)]^2 \tag{12}$$

$$D_1=[(x_1^2+y_1^2)-(x_1-x_2)x-(y_1-y_2)y-(x_1x_2+y_1y_2)] \tag{13}$$

$$D_2=[(x_2^2+y_2^2)-(x_2-x_1)x-(y_2-y_1)y-(x_1x_2+y_1y_2)] \tag{14}$$

根据(8)式和(9)式可以算出矢量 $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$ 在三个坐标轴上的分量分别为：

$$|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|_x=z(y_2-y_1) \tag{15}$$

$$|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|_y=z(x_1-x_2) \tag{16}$$

$$|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|_z=x_1y_2-x_2y_1+xy_1-x_1y+x_2y-xy_2 \tag{17}$$

将(15)、(16)和(17)式代入(11)式中可以求出多边形任一条边在空间某点 P 处产生的磁感应强度在三个坐标轴上的分量分别为：

$$B_x=\frac{\mu_0 Iz(y_2-y_1)}{4\pi R}\left(\frac{D_1}{r_1}+\frac{D_2}{r_2}\right) \tag{18}$$

$$B_y=\frac{\mu_0 Iz(x_1-x_2)}{4\pi R}\left(\frac{D_1}{r_1}+\frac{D_2}{r_2}\right) \tag{19}$$

$$B_z=\frac{\mu_0 I(x_1y_2-x_2y_1+xy_1-x_1y+x_2y-xy_2)}{4\pi R}\times\left(\frac{D_1}{r_1}+\frac{D_2}{r_2}\right) \tag{20}$$

在求出多边形任意边在空间某点 P 处产生的磁感应强度后，根据场强叠加原理，就可以求出整个线圈在空间的磁场分布. 下面以菱形平面载流线圈为例，按照以上方法求出该线圈在空间的磁场分布.

2　菱形平面载流线圈磁场的空间分布

如图 3 所示，设有一菱形载流线圈 $ABCD$ 位于 OXY 平面之内，各顶点坐标分别为 $A(a,0,0)$、$B(0,b,0)$、$C(-a,0,0)$、$D(0,-b,0)$. 根据(18)到(20)式分别求出 AB、BC、CD 和 DA 四条边在空间某点 $P(x,y,z)$ 产生的磁感应强度，再根据场强叠加原理可以求出整个菱形平面载流线圈在 P 点的磁场分布.

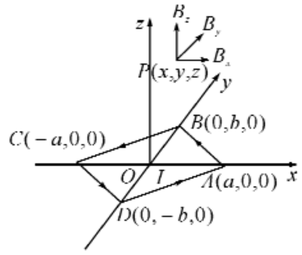

图 3　菱形平面载流线圈的磁场分布

Fig. 3　Distribution of magnetic field generated by a rhombic plane current coil

$$\begin{aligned}B_x=&\frac{\mu_0 Izb}{4\pi[(a^2+b^2)z^2+(bx+ay-ab)^2]}\times\\&\left(\frac{a^2-ax+by}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\frac{b^2+ax-by}{\sqrt{x^2+(y-b)^2+z^2}}\right)\\&-\\&\frac{\mu_0 Izb}{4\pi[(a^2+b^2)z^2+(bx-ay+ab)^2]}\times\\&\left(\frac{b^2-ax-by}{\sqrt{x^2+(y-b)^2+z^2}}+\frac{a^2+ax+by}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right)\\&-\\&\frac{\mu_0 Izb}{4\pi[(a^2+b^2)z^2+(bx+ay+ab)^2]}\times\\&\left(\frac{a^2+ax-by}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}+\frac{b^2-ax+by}{\sqrt{x^2+(y+b)^2+z^2}}\right)\\&+\\&\frac{\mu_0 Izb}{4\pi[(a^2+b^2)z^2+(bx-ay-ab)^2]}\times\\&\left(\frac{b^2+ax+by}{\sqrt{x^2+(y+b)^2+z^2}}+\frac{a^2-ax-by}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\right)\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}B_y=&\frac{\mu_0 Iza}{4\pi[(a^2+b^2)z^2+(bx+ay-ab)^2]}\times\\&\left(\frac{a^2-ax+by}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\frac{b^2+ax-by}{\sqrt{x^2+(y-b)^2+z^2}}\right)\\&+\\&\frac{\mu_0 Iza}{4\pi[(a^2+b^2)z^2+(bx-ay+ab)^2]}\times\end{aligned}$$

$$\left(\frac{b^2-ax-by}{\sqrt{x^2+(y-b)^2+z^2}}+\frac{a^2+ax+by}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right)$$
$$-$$
$$\frac{\mu_0 Iza}{4\pi[(a^2+b^2)z^2+(bx+ay+ab)^2]}\times$$
$$\left(\frac{a^2+ax-by}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}+\frac{b^2-ax+by}{\sqrt{x^2+(y+b)^2+z^2}}\right)$$
$$-$$
$$\frac{\mu_0 Iza}{4\pi[(a^2+b^2)z^2+(bx-ay-ab)^2]}\times$$
$$\left(\frac{b^2+ax+by}{\sqrt{x^2+(y+b)^2+z^2}}+\frac{a^2-ax-by}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\right) \tag{22}$$

$$B_z=\frac{\mu_0 I(ab-bx-ay)}{4\pi[(a^2+b^2)z^2+(bx+ay-ab)^2]}\times$$
$$\left(\frac{a^2-ax+by}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\frac{b^2+ax-by}{\sqrt{x^2+(y-b)^2+z^2}}\right)$$
$$+$$
$$\frac{\mu_0 I(ab+bx-ay)}{4\pi[(a^2+b^2)z^2+(bx-ay+ab)^2]}\times$$
$$\left(\frac{b^2-ax-by}{\sqrt{x^2+(y-b)^2+z^2}}+\frac{a^2+ax+by}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right)$$
$$+$$
$$\frac{\mu_0 I(ab+bx+ay)}{4\pi[(a^2+b^2)z^2+(bx+ay+ab)^2]}\times$$
$$\left(\frac{a^2+ax-by}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}+\frac{b^2-ax+by}{\sqrt{x^2+(y+b)^2+z^2}}\right)$$
$$+$$
$$\frac{\mu_0 I(ab-bx+ay)}{4\pi[(a^2+b^2)z^2+(bx-ay-ab)^2]}\times$$
$$\left(\frac{b^2+ax+by}{\sqrt{x^2+(y+b)^2+z^2}}+\frac{a^2-ax-by}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\right) \tag{23}$$

3 结 语

根据以上分析结果，对于任意多边形平面载流线圈，只要知道其各顶点在 OXY 平面上的坐标，代入(18)到(20)式中再求代数和即可得到该载流线圈在空间任意点的磁场分布. 方法简单、明了，易于理解，可以应用到普通物理的教学中.

参考文献：

[1] 李海，张玉颖. 圆形线电流的磁感应强度[J]. 大学物理，1999，18(6)：20－22.

[2] 曾令宏，张之翔. 圆环电流的磁场以及两共轴圆环电流之间的相互作用力[J]. 大学物理，2002，21(9)：14－16，41.

[3] 朱平. 圆电流空间磁场分布[J]. 大学物理，2005，24(9)：13－17.

[4] 张星辉. 圆电流磁感线的分布及磁感应强度的函数表达式[J]. 大学物理，2006，25(1)：32－37.

[5] 刘耀康. 导出圆电流的磁感应强度的简便方法[J]. 大学物理，2007，26(7)：32－33.

[6] 邓卫娟，李秉宽. 正三角形载流线圈的空间磁场分布[J]. 广西物理，2007，28(2)：35－37，39.

[7] 邝向军. 方形载流线圈的空间磁场计算[J]. 物理与工程，2006，16(1)：18－20，25.

[8] 岑敏锐. 同轴等大方形线圈的互感系数[J]. 武汉工程大学学报，2007，29(4)：90－92.

Spatial distribution of magnetic field generated by a polygonal plane current coil

CEN Min-rui

(School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: According to the magnetic field vector formula of a current straight wire and superposition principle of field intensity, we take the polygonal current-carrying coil as several consecutive current-carrying wires and introduce a method to calculate the spatial distribution of magnetic field generated by a polygonal plane current coil. Then the general expression of magnetic field generated by a rhombic plane current coil is derived by using this method.

Key words: rhombic current-carrying coil plane current coil; superposition principle of field intensity; spatial distribution of magnetic field

本文编辑：龚晓宁