文章编号:1674－2869(2010)03－0111－02

# $n$ 维正态各分量的线性组合服从正态分布的一个证明

熊德之
(武汉工程大学理学院,智能机器人湖北省重点实验室,湖北 武汉 430074)

摘　要:利用微积分和矩阵代数的基本知识,证明了 $n$ 维正态随机变量各分量的线性组合一定服从正态分布的结论.

关键词:$n$ 维正态分布;矩阵剖分;线性组合
中图分类号:O211.3;O211.5　　文献标识码:A　　doi:10.3969/j.issn.1674-2869.2010.03.029

## 1　几个引理

如果 $n$ 维随机变量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的密度函数为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\boldsymbol{V}|^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\right\},$$

则称 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 服从 $n$ 维正态分布[1],记为 $\boldsymbol{X}\sim N_n(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{V})$. 其中

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{V}=(\mathrm{cov}(x_i,x_j))_{n\times n}=(\sigma_{ij})_{n\times n}>0.$$

引理 1　设 $\boldsymbol{X}\sim N_n(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{V})$, $\boldsymbol{V}>0$. 将矩阵剖分[2]

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{(1)}\\ \boldsymbol{X}_{(2)}\end{bmatrix}\begin{matrix}r\\ n-r\end{matrix},\boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_{(1)}\\ \boldsymbol{\mu}_{(2)}\end{bmatrix}\begin{matrix}r\\ n-r\end{matrix},\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_{11} & \boldsymbol{V}_{12}\\ \boldsymbol{V}_{21} & \boldsymbol{V}_{22}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{V}_{11}$ 是 $r$ 阶方阵. 如果 $\boldsymbol{V}_{12}=\boldsymbol{V}_{21}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 与 $\boldsymbol{X}_{(2)}$ 相互独立,且

$$\boldsymbol{X}_{(i)}\sim N(\boldsymbol{\mu}_{(i)},\boldsymbol{V}_{ii}),i=1,2.$$

证　因 $\boldsymbol{V}_{12}=\boldsymbol{V}_{21}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{V}>0$,所以

$$\boldsymbol{V}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_{11}^{-1} & \\ & \boldsymbol{V}_{22}^{-1}\end{bmatrix},$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\boldsymbol{V}_{11}|^{-\frac{1}{2}}|\boldsymbol{V}_{22}|^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{(1)}-\boldsymbol{\mu}_{(1)}\\ \boldsymbol{X}_{(2)}-\boldsymbol{\mu}_{(2)}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_{11}^{-1} & \\ & \boldsymbol{V}_{22}^{-1}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{(1)}-\boldsymbol{\mu}_{(1)}\\ \boldsymbol{X}_{(2)}-\boldsymbol{\mu}_{(2)}\end{pmatrix}\right\}=$$
$$\left[(2\pi)^{-\frac{r}{2}}|\boldsymbol{V}_{11}|^{-\frac{1}{2}}\times\right.$$
$$\left.\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_{(1)}-\boldsymbol{\mu}_{(1)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{11}^{-1}(\boldsymbol{X}_{(1)}-\boldsymbol{\mu}_{(1)})\right\}\right]\times$$
$$\left[(2\pi)^{-\frac{n-r}{2}}|\boldsymbol{V}_{22}|^{-\frac{1}{2}}\times\right.$$
$$\left.\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_{(2)}-\boldsymbol{\mu}_{(2)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_{(2)}-\boldsymbol{\mu}_{(2)})\right\}\right]$$

上式等号右端第一个方括号内是 $r$ 维正态分布的密度函数,即 $\boldsymbol{X}_{(1)}\sim N_r(\boldsymbol{\mu}_{(1)},\boldsymbol{V}_{11})$. 同样有,$\boldsymbol{X}_{(2)}\sim N_{n-r}(\boldsymbol{\mu}_{(2)},\boldsymbol{V}_{22})$. 由于 $\boldsymbol{X}$ 的密度函数等于 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 的密度函数与 $\boldsymbol{X}_{(2)}$ 的密度函数的乘积,故 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 与 $\boldsymbol{X}_{(2)}$ 相互独立[3].

引理 2　设 $\boldsymbol{X}\sim N_n(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{V})$, $\boldsymbol{V}>0$, $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶满秩矩阵,则

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\sim N_n(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}).$$

证　作满秩线性变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,则 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}=|\boldsymbol{A}^{-1}|\neq 0,$$

且 $|\boldsymbol{A}^{-1}|$ 的绝对值 $=(|\boldsymbol{A}|^2)^{-\frac{1}{2}}=(|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|)^{-\frac{1}{2}}$.

设 $\boldsymbol{Y}$ 的密度函数为 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,其分布函数

$$G(y)=P\{\boldsymbol{Y}<y\}=$$
$$\int\cdots\int_{\boldsymbol{Y}<y} g(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n.$$

根据随机变量函数的分布和重积分换元法,有

$$G(y)=P\{\boldsymbol{Y}<y\}=P\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<y\}=$$
$$\int\cdots\int_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<y} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=$$
$$\int\cdots\int_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<y}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\boldsymbol{V}|^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\right\}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$\underline{\underline{\text{换元}}}\int\cdots\int_{\boldsymbol{Y}<y}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|^{-\frac{1}{2}}\times$$

收稿日期:2009－09－01
作者简介:熊德之(1949－),男,湖北武汉人,教授. 研究方向:概率统计及其应用.

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A\mu})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A\mu})\right\}\times$$

$$\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n$$

所以几乎处处有

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}}|^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A\mu})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A\mu})\right\}.$$

因此，

$$\boldsymbol{Y}\sim N_n(\boldsymbol{A\mu},\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}})$$

引理3　设 $\boldsymbol{X}\sim N_n(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{V})$，$\boldsymbol{V}>0$. 将矩阵剖分

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{(1)}\\ \boldsymbol{X}_{(2)}\end{bmatrix}\begin{matrix}r\\ n-r\end{matrix},\boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_{(1)}\\ \boldsymbol{\mu}_{(2)}\end{bmatrix}\begin{matrix}r\\ n-r\end{matrix},\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_{11} & \boldsymbol{V}_{12}\\ \boldsymbol{V}_{21} & \boldsymbol{V}_{22}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{V}_{11}$ 是 $r$ 阶方阵. 则

$$\boldsymbol{X}_{(1)}\sim N_r(\boldsymbol{\mu}_{(1)},\boldsymbol{V}_{11}).$$

证　与引理1比较，引理3少了条件 $\boldsymbol{V}_{12}=\boldsymbol{V}_{21}=\boldsymbol{0}$. 因 $\boldsymbol{V}>0$，所以 $\boldsymbol{V}_{11}>0$，$\boldsymbol{V}_{22}>0$，令

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{V}_{21}\boldsymbol{V}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_{n-r}\end{bmatrix},$$

显然 $|\boldsymbol{C}|\neq 0$，由引理2，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CX}\sim N_n(\boldsymbol{C\mu},\boldsymbol{CVC}^{\mathrm{T}})$. 这里

$$\boldsymbol{CX}=\begin{bmatrix}X_{(1)}\\ X_{(2)}-\boldsymbol{V}_{21}\boldsymbol{V}_{11}^{-1}X_{(1)}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C\mu}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_{(1)}\\ \boldsymbol{\mu}_{(2)}-\boldsymbol{V}_{21}\boldsymbol{V}_{11}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{(1)}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{CV}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{V}_{22}-\boldsymbol{V}_{21}\boldsymbol{V}_{11}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}\end{bmatrix}.$$

由引理1，$\boldsymbol{X}_{(1)}\sim N_r(\boldsymbol{\mu}_{(1)},\boldsymbol{V}_{11})$.

## 2　定理及其证明

定理　设 $\boldsymbol{X}\sim N_n(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{V})$，$\boldsymbol{V}>0$，$\boldsymbol{A}$ 为 $r\times n$ 矩阵，$R(\boldsymbol{A})=R$，则

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}\sim N_r(\boldsymbol{A\mu},\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}}).$$

证　因 $\boldsymbol{A}$ 为 $r\times n$ 矩阵，$R(\boldsymbol{A})=r$，可将 $\boldsymbol{A}$ 补充 $n-r$ 行[4]，使之成为满秩方阵 $\boldsymbol{P}$，于是由引理2，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{PX}\sim N_n(\boldsymbol{P\mu},\boldsymbol{PVP}^{\mathrm{T}})$，记

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix},$$

则　$$\boldsymbol{PX}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{AX}\\ \boldsymbol{BX}\end{bmatrix}\begin{matrix}r\\ n-r\end{matrix},\boldsymbol{P\mu}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A\mu}\\ \boldsymbol{B\mu}\end{bmatrix}\begin{matrix}r\\ n-r\end{matrix},$$

$$\boldsymbol{PVP}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{AVB}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{BVA}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{BVB}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

根据引理3，知 $\boldsymbol{AX}\sim N_r(\boldsymbol{A\mu},\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}})$.

特别地，若 $\boldsymbol{A}$ 为非零行向量 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$，这时 $R(\boldsymbol{A})=1$，$\boldsymbol{AX}=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i$，$\boldsymbol{A\mu}=\sum_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\mu}_i$，$\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_ik_j\sigma_{ij}$. 故 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性组合 $\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_ik_j\sigma_{ij}\right)$.

参考文献：


[1]　Richard A Johnson, Dean W Wichern. 实用多元统计分析引论[M]. 陆璇，葛余博，译. 4版. 北京：清华大学出版社，2001.

[2]　张尧庭，方开泰. 多元统计分析引论[M]. 北京：科学出版社，1982.

[3]　周概容. 概率论与数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，1984.

[4]　张禾瑞，郝炳新. 高等代数[M]. 5版. 北京：高等教育出版社，2007.


# A method to prove linear combinations of components of $n$-dimensional normal random variable obey normal distribution


***XIONG De-zhi***

(School of Science, Hubei Province Key Laboratory of Intelligent Robot,
Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)



**Abstract**: This paper develops a method which uses basic knowledge of calculus and matrix algebra to prove that linear combinations of components of $n$ dimensional normal random variable certainly obey normal distribution.



**Key words**: $n$-dimensional normal distribution; partitioning of matrices; linear combination

本文编辑：龚晓宁