

同时反演阻尼区域和系数的一种方法

王俊杰¹,王连堂²

(1. 思茅师范高等专科学校数学系, 云南 普洱 665000; 2. 西北大学数学系, 陕西 西安 710127)

摘要:反演区域和阻尼边界条件中的阻尼系数是一类重要的数学物理反问题, 有广泛的应用前景. 对于分别反演区域和阻尼系数已有不少研究, 而同时反演区域和阻尼系数由于计算的复杂性, 到现在研究还比较少. 本文利用散射波的远场数据来同时反演阻尼区域和系数, 并给出了数值方法, 数值例子表明这中方法的简单性和准确性.

关键词:阻尼边界条件; 亥姆霍兹方程; 反散射问题

中图分类号: O29

文献标识码: A

doi: 10.3969/j.issn.1674-2869.2010.05.027

0 引言

声波的反散射理论是一个典型的数学物理反问题, 它是利用外部的测量信息, 探测介质的内部性质或者边界性质, 而这些信息通常是不能直接测量的, 由于声波反散射理论在雷达及地球物理勘探等领域的需要, 对反散射理论及计算方法的研究有着广泛的应用前景. D. Colton, P. Monk 和 R. L. Ochs^[1-3] 分别用远场模式的完全与不完全数据进行了区域反演, David. Colton^[4] 中应用线性抽样方法进行了区域反演, 在 Pedro. Serranho^[5] 中应用杂交方法对阻尼边界进行了区域和阻尼系数的同时反演. 本文研究声波阻尼反问题的区域和系数同时反演的反问题, 即在阻尼系数和区域未知的情况下, 利用远场模式的数据来同时反演阻尼区域和系数. 本文给出了具体的计算方法, 并给出了数值例子.

本文考虑在均匀介质中传播的声波, 此声波碰到一个无限长的柱体. 设柱体的截面 $D \subset \mathbb{R}^2$ 母线平行于 z 轴, 设入射波是平面波 $u^i(x) = e^{ikx \cdot \alpha}$, $x \in \mathbb{R}^2$ 其中 $k > 0$ 是波数, α 为一单位向量, 入射波碰到柱体发生散射, 记总体场为 $u = u^i + u^s$, u^s 表示散射场, 总体场满足阻尼边界条件. 正散射问题是 $u \in C^2(\mathbb{R}^2) \setminus \bar{D} \cap C(R) \setminus D$ 满足:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus D \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + ik\lambda u = 0 \quad \text{on } \partial D \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right\} = 0, r = |x| \quad (3)$$

其中 ν 表示外法线方向, λ 为声波阻尼系数,

(3) 称为 sommerfeld 散射条件.

若 $IM(\lambda), \partial D \in C^2$, 则问题 (1) ~ (3) 存在唯一解^[6]. 由文献 [6] 可知, 散射波 u^s 有以下渐进性质:

$$u^s(r, \theta) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} F(\theta; k, \alpha) + o(r^{-\frac{3}{2}}) \quad (4)$$

其中 (r, θ) 为 x 的极坐标, F 称为散射波 u^s 的远场模式.

本文考虑的反问题是给定 $F(\theta; k, \alpha_n)$; 其中 $\theta \in [0, 2\pi]$, $\alpha_n, n = 1, 2, 3, \dots, N$ 是 N 个不同的单位向量, 利用这些数据来确定阻尼边界 ∂D 和系数 λ .

1 反演方法

由 Green 公式与第一类零阶 Hankel 函数的渐进性质可得:

$$F(\theta; k, \alpha) = -\frac{e^{ik\pi}}{\sqrt{8k\pi}} \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u(y, k, \alpha)}{\partial \nu(y)} e^{ik\rho \cos(\theta - \varphi)} - u(y, k, \alpha) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} e^{-ik\rho \cos(\theta - \varphi)} \right\} ds(y) \quad (5)$$

其中 $x = re^{i\theta}, y = \rho e^{i\varphi}$, ν 表示 ∂D 上的单位外法线方向.

本文的方法基于 Herglotz 波函数理论^[7]. 一个函数 v 称为 Herglotz 波函数, 如果:

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \iint_{|x| < r} |v(x)|^2 dx < \infty$$

在极坐标 (ρ, φ) 下, Herglotz 波函数有如下积分形式:

$$v(\rho, \varphi, k) = \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{ik\rho \cos(\theta-\varphi)} d\theta \quad (6)$$

其中 $g \in L^2[0, 2\pi]$ 是 Herglotz 波函数的核, 由(2)和(5)得:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(\theta; k, \alpha) \overline{g(\theta)} d\theta &= -\frac{e^{\frac{ik\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u(\gamma, k, \alpha)}{\partial v} \times \right. \\ &\quad \left. \overline{v(\rho, \varphi, k)} - \frac{\partial \overline{v(\rho, \varphi, k)}}{\partial v} u(\gamma, k, \alpha) \right\} ds(\gamma) = \\ &= \frac{e^{\frac{ik\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \int_{\partial D} u(\gamma, k, \alpha) \left(\frac{\partial}{\partial v(\gamma)} + ik\lambda \right) \overline{v(\rho, \varphi, k)} ds(\gamma) \end{aligned} \quad (7)$$

定义集合:

$$S = \{F(\theta; k, \alpha_n) - F(\theta; k, \alpha_1), n = 1, 2, \dots\}$$

其中 $F(\theta; k, \alpha_n)$ 是对应于入射波 $e^{ikx \cdot \alpha_n}$ 的远场模式. 将 S 中的元素看成 θ 的函数, S 是 $L^2[0, 2\pi]$ 的子集, 且

$$L^2[0, 2\pi] = \overline{\text{Span} S} \oplus S^\perp$$

定理 2.1^[8]: 设 $\lambda > 0, v$ 是如下问题的解:

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{in } D \\ \left(\frac{\partial}{\partial v} - ik\lambda \right) v = \left(\frac{\partial}{\partial v} - ik\lambda \right) H_0^{(2)}(k\rho) & \text{on } D \end{cases} \quad (8)$$

其中 (ρ, φ) 表示极坐标, H_0^2 是零阶第二类 Hanker 函数, 则

a. 如果 v 是 Herglotz 波函数, 核为 g , 则 $S^\perp = \text{Span}\{g\}$

b. 如果 v 不是 Herglotz 波函数, 核为 g , 则 $S^\perp = 0$

因此有以下定理成立:

定理 2.2: 设 u 是 Helmholtz 方程的解, D 是有界的星形域, $\partial D: \rho = \rho(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \rho \in C^{2,\alpha}[0, 2\pi], u \in C^{2,\alpha}[\bar{D}]$, 则对任意 $\varepsilon \geq 0$, 存在 Herglotz 波函数 v , 核的支集含于 $[0, 2\pi]$ 使得

$$\max_{x \in D} |u(x) - v(x)| \leq \varepsilon$$

根据定理 2.2, (8) 的解可由 Herglotz 波函数逼近. 再由定理 2.1 可知对应于入射波 $u_n^i = e^{ikx \cdot \alpha_n}$ 的远场模式的集合聚集在超平面:

$$(F, g) = (f_1, g)$$

周围, 其中 g 是逼近(8)的解的 Herglotz 波函数的核, 支集含于 $[0, 2\pi]$, (\cdot, \cdot) 表示 L^2 空间上的内积.

于是反问题可归结为一个约束最优化问题.

定义集合:

$$U_1(M) = \{g \in H^1[0, 2\pi]: |g|_{H^1} \leq M\}$$

$$U_2 = \{\rho \in C_1[0, 2\pi]: \rho \text{ 是周期函数.}$$

$$0 \leq a \leq \rho \leq b, \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |\rho'| \leq c\}$$

$$U_3 = \{\lambda(\varphi) \leq M_1, |\lambda(\varphi) - \lambda(\psi)| \leq M_2 |\varphi - \psi|\}$$

其中 M, M_1, M_2, a, b, c 为常数.

由嵌入定理 $U_1(M)$ 在 $C[0, 2\pi]$ 中紧, $U_2(M)$ 在 $C[0, 2\pi]$ 中紧, 并且由 Arzela - Ascoli 定理, $U_2(M)$ 在 $C[0, 2\pi]$ 中紧, 再由 Tikhonov 定理, $U(M) = U_1(M) \times U_2 \times U_3$ 在 $C[0, 2\pi] \times C[0, 2\pi] \times C[0, 2\pi]$ 中紧.

以下给出 (F_1, g) 的值, 因为

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(\theta; k, \alpha) \overline{g(\theta)} d\theta &= \\ &= \frac{e^{-\frac{ik\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \int_{\partial D} u(\gamma, k, \alpha) \left(\frac{\partial}{\partial v(\gamma)} + ik \right) \overline{v(\rho, \varphi, k)} ds(\gamma) \end{aligned}$$

且文献[2]中

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} u(\gamma, k, \alpha) \left(\frac{\partial}{\partial v(\gamma)} - ik \right) H_0^{(2)}(k\rho) ds(\gamma) &= \\ &= -4iu_n^i(0) = -4i \end{aligned}$$

再由

$$\left(\frac{\partial}{\partial v} - ik\lambda \right) v(\rho, \varphi, k) = \left(\frac{\partial}{\partial v} - ik\lambda \right) H_0^{(2)}(k\rho)$$

得到:

$$\int_0^{2\pi} F_1(\theta; k, \alpha) \overline{g(\theta)} d\theta = -c^{-\frac{ik}{4}} \sqrt{\frac{2}{k\pi}}$$

最终得到下面的最优化问题:

$$\begin{aligned} \mu(F, \rho, \lambda): &= \min_{(g, \rho, \lambda)} \left\{ \sum_{n=1}^N \left| \int_0^{2\pi} F(\theta; k, \alpha_n) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \overline{g(\theta)} + c^{-\frac{ik}{4}} \sqrt{\frac{2}{k\pi}} \right|^2 + \int_0^{2\pi} \left| \left(\frac{\partial}{\partial v} - ik\lambda(\varphi) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left. (v(\rho(\varphi), \varphi, k) - H_0^{(2)}(k\rho(\varphi))) \right|^2 d\varphi \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

其中 v 为(5)所定义的 Herglotz 波函数, 由于 $\lambda > 0$, 所以内问题不存在任何特征值, 因而在此只要求 $k > 0$ 即可.

2 数值计算

下面对前面的反演方法给出计算方法. 反问题的数据是一系列方向的平面波和所对应的远场模式, 这些数据的产生是由解正问题所得.

本文采用 Nyström 方法解正问题.

对于定解问题

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{in } R^2 \setminus \bar{D} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} + ik\lambda u = 0 \quad \text{on } \partial D \quad (11)$$

寻找如下单层位势的解:

$$u_a(x) = \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in R^2 \setminus \bar{D}$$

其中 $\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|), x \neq y$.

从而得到散射波的远场模式:

$$F_\alpha(\alpha) = \frac{c^{\frac{ik}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \int_{\partial D} \varphi(y) e^{iky \cdot \alpha} ds(y) \quad |\alpha| = 1$$

对给定的波数 k 和 $[0, 2\pi]$ 上不同方向的 N 个入射平面波, 用上面的方法得到的远场模式的逼近, 将此数据作为原始数据来求反问题.

记 F_α 为 $F_\alpha(\theta; k, \alpha)$, 用有限三角级数:

$$\hat{F}_\alpha(\theta, k, \alpha_1) = \sum_{j=-n_1}^{n_1} F_j^l e^{ij\theta}, l = 1, 2, 3, \dots, N$$

逼近 $F_\alpha(\theta; k, \alpha)$, 于是

$$F_j^l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_\alpha(\theta, k, \alpha_1) e^{-ij\theta} d\theta$$

其中:

$$\alpha_l = \left(\cos\left(\frac{2\pi l}{N}\right), \sin\left(\frac{2\pi l}{N}\right) \right), l = 1, 2, 3, \dots, N$$

用三角级数逼近 g, ρ, λ

$$g_\alpha(\theta) = \sum_{j=-n_1}^{n_1} g_j e^{ij\theta} \quad g_j \in \mathbb{C}$$

$$\rho_\alpha(\varphi) = a_0 + \sum_{j=1}^{n_2} (\alpha_j + \cos(j\varphi) + b_j \sin(j\varphi)), \\ a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_\alpha(\varphi) = a_0^1 + \sum_{j=1}^{n_3} (\alpha_j^1 + \cos(j\varphi) + b_j^1 \sin(j\varphi)), \\ a_j^1, b_j^1 \in \mathbb{R}$$

于是得到:

$$\int_0^{2\pi} F_\alpha(\theta, k, \alpha_1) \overline{g(\theta)} d\theta \approx$$

$$\int_0^{2\pi} \hat{F}_\alpha(\theta, k, \alpha_1) \overline{g(\theta)} d\theta = 2\pi \sum_{j=-n_1}^{n_1} F_j^l \overline{g_j}$$

利用矩形公式积分, 则(9) 离散为:

$$\mu(F, \rho, \lambda) := \min_{(g, \varphi, \lambda) \in U(M)} \left\{ \frac{k\pi}{2} \sum_{l=1}^N \left| \sum_{j=-n_1}^{n_1} 2\pi F_j^l + \right. \right.$$

$$\left. e^{\frac{ik}{4}} \sqrt{\frac{2}{k\pi}} \right|^2 + \frac{2\pi}{m_1} |v(\varphi_p) + v_1(\varphi_p)|^2 \Big\}$$

其中:

$$v(\varphi_p) = \frac{2\pi}{m_2} \sum_{p=1}^{m_2} g_\alpha(\theta_p) \left[\frac{ik\rho_\alpha}{\sqrt{\rho_\alpha^2 + \rho_\alpha'^2}} \cos(\theta_p - \varphi_q) - \right. \\ \left. ik\lambda_\alpha(\varphi_p) \right] e^{ik\rho_\alpha(\varphi_p) \cos(\theta_p - \varphi_q)}$$

$$v_1(\varphi_q) = ik\lambda_\alpha(\varphi_q) H_1^2(k\rho_\alpha(\varphi_q)) +$$

$$\frac{k\rho_\alpha}{\sqrt{\rho_\alpha^2 + \rho_\alpha'^2}} H_1^2(k\rho_\alpha(\varphi_q))$$

$$\text{其中 } \varphi_q = \frac{2\pi q}{m_1}, \theta_q = \frac{2\pi p}{m_2}.$$

反问题参数: $n_1 = 6, n_2 = 6, n_3 = 6, m_1 = m_2 = 30, k = 1.0$.

入射波数目 $N = 16$, 远场模式数目 $n = 36$. 图中实线表示边界 ρ 或系数 λ , 虚线表示反演的边界 ρ_α 或系数 λ_α .

考虑在均匀介质中传播的声波, 此声波碰到一个无限长的柱体. 设柱体的截面 $D \subset \mathbb{R}^2$ 母线平行于 z 轴, 设入射波是平面波 $u^i(x) = e^{ikx \cdot \alpha}, x \in \mathbb{R}^2$ 其中 $k > 0$ 是波数, α 为一单位向量, 入射波碰到柱体发生散射. 在一些情况下我们需要知道柱体的截面形状和边界的性质, 但是不能通过直接测量得到, 可以通过测量到的散射波的信息得到即: 通过远场模式反演区域形状和阻尼系数.

例 3.1 精确的柱体截面形状: $\rho = 2 + 0.3 \times \cos(3t)$, 精确的阻尼系数 $\lambda = 2 + \sin(t)$.

反演区域

$$\rho_\alpha(\varphi) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n_2} (a_j \cos(j\varphi) + b_j \sin(j\varphi)), \\ a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

其中 a_j, b_j 见表 1,

反演阻尼系数

$$\lambda_\alpha(\varphi) = a_0^1 + \sum_{j=1}^{n_3} (a_j^1 \cos(j\varphi) + b_j^1 \sin(j\varphi)), \\ a_j^1, b_j^1 \in \mathbb{R}$$

a_j^1, b_j^1 见表 1, 反演结果见图 1.

表 1 例 3.1 的边界和阻尼系数同时反演的数值结果
Table 1 Recovering numerical result of the region and impedance coefficient for example 3.1

i	a_i	b_i	a_i^1	b_i^1
0	2.03840599		1.99996613	
1	0.0570274	0.00000028156	0.0004047	1.00010681
2	0.05228971	0.000000916002	0.0009893	0.0023081
3	0.25451298	0.000000517597	0.00836116	0.0020411
4	0.0153643	0.000000534725	0.0106271	0.00864901
5	0.00492345	0.0000181487	0.0023353	0.0023774
6	0.03010294	0.000000086766	0.00024828	0.0003258

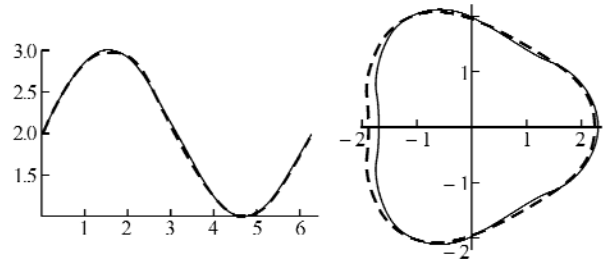


图 1 例 3.1 的边界和阻尼系数同时反演的结果

Fig. 1 Recovering result of the region and impedance coefficient for example 3.1

例 3.2 精确的柱体截面形状: 边界 $\rho = 2 + \cos(t) \sin(t)$, 精确的阻尼系数 $\lambda = 2 + \cos(t)$.

反演区域

$$\rho_{\alpha}(\varphi) = a_0 + \sum_{j=1}^{n_2} (a_j \cos(j\varphi) + b_j \sin(j\varphi)),$$

$$a_j, b_j \in R,$$

其中 a_j, b_j 见表 2.

反演阻尼系数

$$\lambda_{\alpha}(\varphi) = a_0^1 + \sum_{j=1}^{n_3} (a_j^1 \cos(j\varphi) + b_j^1 \sin(j\varphi)),$$

$$a_j^1, b_j^1 \in R$$

a_j^1, b_j^1 见表 2, 反演结果见图 2.

表 2 例 3.2 的边界和阻尼系数同时反演的数值结果

Table 2 Recovering numerical result of the region and impedance coefficient for example 3.2

i	a_i	b_i	a_i^1	b_i^1
0	2.01325963		1.9999829	
1	0.00521929	0.037672942	0.9996178	0.000208725
2	0.00634388	0.457108125	0.0018094	0.000567176
3	0.013963112	0.01670331	0.00574105	0.00171023
4	0.0032006	0.00197101	0.05746851	0.00948173
5	0.000010645	0.000217097	0.000114587	0.00049044
6	0.00320145	0.00494354	0.000231219	0.000046053

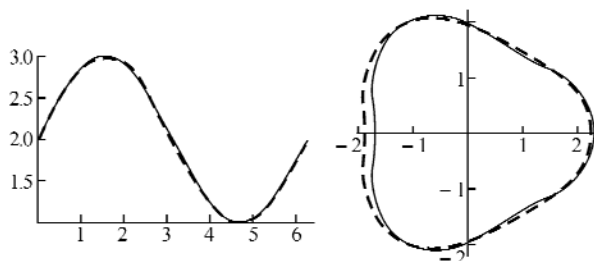


图 2 例 3.2 的边界和阻尼系数同时反演的结果

Fig. 2 Recovering result of the region and impedance coefficient for example 3.2

从图 1 和图 2 看出本文给出的同时反演阻尼系数和边界的反演方法的反演效果是比较好的。

参考文献:

- [1] Colton D, Monk P. A novel method for solving the inverse scattering problem for time harmonic acoustic wave in the resonance region[J]. SIAMJ Appl Math, 1985,45:1039-1053.
- [2] Colton D, Monk P. A novel method for solving the inverse scattering problem for time harmonic acoustic wave in the resonance region[J]. II SIAMJ Appl Math, 1986,46:506-523.
- [3] Ochs R L. The Limited Aperture Problem of inverse scattering: Dirichlet Boundary Condition[J]. SIAMJ Appl Math, 1987,47:1320-1341.
- [4] David Colton, Michele Piana, Roland Potthast. A Simple method using Morozov's discrepancy principle for solving inverse scattering problems[J]. Inverse Problem, 2001,17:1997-2015.
- [5] Pedro Serranho. A Hybrid Method for Inverse Scattering for Shape and Impedance[J]. Inverse Problem, 2006, 22:663-680.
- [6] Colton D, Kress R. Integral equation methods in scattering theory[M]. New York: Wileyinterscience publication, 1983.
- [7] Colton D, Kress R. Inverse and electromagnetic scattering theory[M]. New York: Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- [8] 王连堂, 利用远场模式反演声波阻尼系数[J]. 计算数学, 1999, 2:89-98.

A method for recovering impedance coefficient region from the field pattern

WANG Jun-jie¹, WANG Lian-tang²

(1. Mathematics Department of Simao Teachers' College, Pu'er 665000, China;

2. Mathematics Department of Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: Recovering the region and impedance coefficient in impedance boundary condition is a class important inverse problem of mathematical physics. There is a wide range of application. There are a number of studies for Recovering the region or impedance coefficient, but there are less studies for Recovering the region and impedance coefficient. The paper use the data of the far field pattern to determine the region and impedance coefficient of an obstacle. An approximation method is presented. Numerical examples are given showing that this method is both accurate and simple.

Key words: impedance boundary condition; helmholtz equation; inverse scattering problem

本文编辑: 龚晓宁