文章编号:1674－2869(2010)11－0108－03

零点定理的应用

余　荣[1,2]

(1. 武汉工程大学理学院, 湖北 武汉 430074;
2. 武汉工程大学智能机器人湖北省重点实验室,湖北 武汉 430074)

摘　要:首先介绍零点定理,然后通过建立数学模型结合零点定理成功地解决了拉橡皮筋、放稳椅子、巧切蛋糕、上山下山等事例,最后归纳出应用零点定理解题的一般步骤.

关键词:零点定理;连续;应用

中图分类号:G642.0　　文献标识码:A　　**doi**:10.3969/j.issn.1674-2869.2010.11.029

0　引　言

根据闭区间连续函数的性质,我们知道零点定理是介值定理的一种特殊情况. 零点定理在数学、物理等学科中具有十分广泛的应用[1]. 比如,可以体现在拉橡皮筋、放稳椅子、巧切蛋糕、上山下乡等实际问题中,本文通过数学建模结合零点定理解决了以上四个事例,并归纳出应用零点定理解题的一般步骤.

1　零点定理

如果 x_0 使 $f(x_0)=0$,则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

零点定理:设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,那么在开区间 (a,b) 内至少一点 ξ,使 $f(\xi)=0$.

零点定理有明显的几何意义,能够简单地从几何意义上对以上问题作出正确的猜测. 但要证明这些简单的猜测却非常困难,似乎印证了"越是简单的越困难"这句话. 零点定理的几何解释是:由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,故 $f(x)$ 的图象是一条连绵不断的连续曲线. 若 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,则曲线的两个端点一个在 x 轴上方,一个在 x 轴下方,从而曲线必然至少通过 x 轴一次. 所以,零点定理也称为根的存在性定理. 此外,零点定理有下面两个推论.

推论 1(介值定理):设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,那么,对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数 C,在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=C$.

证明:令 $g(x)=f(x)-C$,并设 $f(a)<f(b)$,则 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且

$g(a)=f(a)-C<0, g(b)=f(b)-C>0.$

由零点定理知:存在 $\xi\in(a,b)$,使 $g(\xi)=0$. 即 $f(\xi)=C$.

注:零点定理是介值定理的一种特殊情况.

推论 2:设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, M,m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值,则对于任何 $C, m<C<M$,必然存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=C$.

2　零点定理的事例

零点定理的应用与很多实际问题有关,以下将列举四例.

例 1　拉一根橡皮筋,一头朝左拉,同时另一头朝右拉,在橡皮筋不拉断的情况下橡皮筋上有一点在他原来的位置上不动.

证明:如图 1,假设拉之前各点的位置用 x 表示,拉之后各点的位置用 $f(x)$ 表示,在橡皮筋不拉断的情况下,函数 $f(x)$ 是连续函数,这里 $x\in[a,b]$. 朝左拉的那头的橡皮筋终点在起点左边,从而 $f(a)<a$;朝右拉的那头的橡皮筋终点在起点右边,从而 $f(b)>b$.

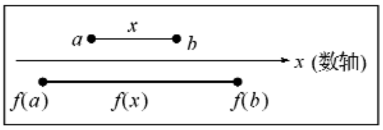

图 1　拉橡皮筋模型图

Fig. 1　The model graph of pulling a rubber band

设 $F(x)=f(x)-x, x\in[a,b]$,则函数 $F(x)$

收稿日期:2010－05－17

作者简介:余　荣(1980－),女,湖北仙桃人,硕士,讲师. 研究方向:运筹学与控制论.

在$[a,b]$连续，且

$$F(a)=f(a)-a<0 \quad F(b)=f(b)-b>0$$

则$F(x)=f(x)-x$在$[a,b]$上满足零点定理，即$\exists\xi\in(a,b)$，有$f(\xi)=\xi$，即他前后的位置不变.

例 **2**　四脚一样长，四脚的连线呈正方形的椅子放在起伏不平的光滑曲面的地上，能否将这把椅子四脚同时落地并放稳?

答案是肯定的.

分析：如图2，设椅子四脚连线交点为O，初始时四脚连线呈正方形$ABCD$，以O为原点，对角线AC为X轴，建立直角坐标系，椅子在绕动过程中的任一位置$A_1B_1C_1D_1$由对角线A_1C_1与X轴的夹角θ唯一确定. 在不同位置，椅子脚与地面的距离不同，这一距离为θ的连续函数. 设A，C两脚与地面距离之和为$f(\theta)$，B，D两脚与地面距离之和为$g(\theta)$，在任意位置，椅子总有三只脚同时落地，即对任意的θ，$f(\theta)$与$g(\theta)$总有一个为零. 不妨设$g(\theta)=0$，这样，该问题便归结为以下的数学问题：设$f(\theta)$、$g(\theta)$都是θ的连续函数，$g(\theta)=0$，且对任意θ，$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，存在$\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

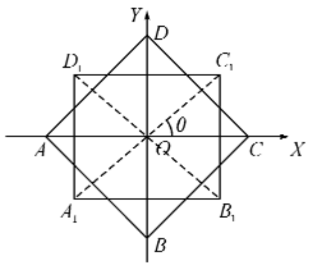

图2　放稳椅子模型图

Fig. 2　The model graph of putting a chair

证明：将椅子转动$\frac{\pi}{2}$，使对角线互换，

由于$g(0)=0$，$f(0)>0$，可得：$f(\frac{\pi}{2})=0$，$g(\frac{\pi}{2})>0$，令$h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$且$h(\theta)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上连续，并满足$h(0)>0$且$h(\frac{\pi}{2})<0$，

根据零点定理，必存在$\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$使$h(\theta_0)=0$，即$f(\theta_0)=g(\theta_0)$.

因为$f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$，所以$f(\theta_0)=0$，此时椅子放稳.

例 **3**　妹妹小英过生日，妈妈给做了一块边界形状任意的蛋糕. 哥哥小明见了也想吃，小英指着蛋糕上一点对哥哥说，你能过这点切一刀，使切下的两块蛋糕面积相等，便把其中的一块送给你. 小明苦想了半天，终于用刚刚学过的高等数学知识证明了一定存在过这一点的某一刀可以把蛋糕切成两部分.

分析：问题归结为如下一道几何证明题.

已知：平面上一条没有交叉点的封闭曲线（无论什么形状），p是曲线所围图形上任一点.

求证：一定存在一条过p的直线，将这图形的面积二等分.

证明：

(1)过p点任作一直线l，将曲线所围图形分为两部分，其面积分别记为S_1，S_2.

若$S_1=S_2$（此种情况很难办到），则l即为所求;

若$S_1\neq S_2$，则不妨设$S_1>S_2$（此时l与x轴正向的夹角记为α），如图3，下面对此种情况证明之.

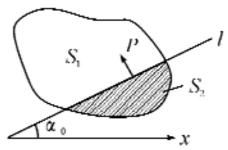

图3　巧切蛋糕模型图(1)

Fig. 3　The model graph of cutting a cake(1)

(2)以p点为旋转中心，将l按逆时针方向旋转，如图4，面积S_1，S_2就连续地依赖于角α变化，记为$S_1(\alpha)$，$S_2(\alpha)$，并设$f(\alpha)=S_1(\alpha)-S_2(\alpha)$.

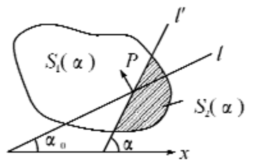

图4　巧切蛋糕模型图(2)

Fig. 4　The model graph of cutting a cake (2)

(3)函数$f(a)$在$[\alpha_0,\alpha_0+\pi]$上连续，且在端点异号：

$$f(\alpha_0)=S_1(\alpha_0)-S_2(\alpha_0)>0$$

$$f(\alpha_0+\pi)=S_1(\alpha_0+\pi)-S_2(\alpha_0+\pi)=S_2(\alpha_0)-S_1(\alpha_0)<0$$

根据零点定理，必存在一点$\xi\in(\alpha_0,\alpha_0+\pi)$，使$f(\xi)=0$，即$S_1(\xi)=S_2(\xi)$.

过p作直线，使之与x轴正向的夹角成ξ，该直线即为所求.

例 **4**　一登山运动员从早上7点开始攀登某座山峰，在下午7点到达山顶；第二天早上7点再沿原路下山，下午7点到达山脚. 我们可以证明：这个运动员在这两天的某一相同时刻经过登山路线的同一地点.

解:根据题意,以时间 t 为横坐标,山高 h 为纵坐标,则登山过程可用时间—高度坐标系中的一条连续曲线表示. 如图 5 中 AB 曲线表示上山过程,CD 曲线表示下山过程,AB 和 CD 至少有一个交点 P,P 点坐标(t,h)就表示两天的同一时刻 t 经过登山路线的同一地点.

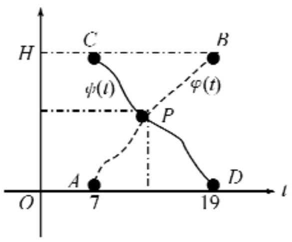

图 5　上山下山模型图

Fig. 5　The model graph of climbing a mountain

下面给出数学证明:

记 AB 曲线为 $h=\varphi(t)$ $(7\leqslant t\leqslant 19)$;$CD$ 曲线为 $h=\psi(t)$ $(7\leqslant t\leqslant 19)$.

令 $f(t)=\varphi(t)-\psi(t)$ $(7\leqslant t\leqslant 19)$.

因 $\varphi(t)$,$\psi(t)$连续,故 $f(t)$ 在$[7,19]$上连续,又

$f(7)=\varphi(7)-\psi(7)=0-\psi(7)=-H<0$,(其中 H 为山的高度)

$f(19)=\varphi(19)-\psi(19)=\varphi(19)-0=H>0$,

根据连续函数的零点定理,必有 $\xi\in(7,19)$,使 $f(\xi)=0$,即 $\varphi(\xi)-\psi(\xi)=0$,

故 $\varphi(\xi)=\psi(\xi)$.

注意:上述命题即曲线 AB 与 CD 存在交点 P(数学上称为不动点 P)成立的唯一条件是上山和下山的时间区间有部分重合.

3　利用零点定理解题的步骤

最后,我们给出利用零点定理的解题步骤[2]:一是作辅助函数,(1)将要证等式中的 ξ 换成 x,得到相应方程;(2)通过移项,使方程一边为“0”;(3)将方程另一边设为辅助函数. 二是寻找闭区间,使辅助函数在该区间端点处的值异号.

4　结　语

零点定理在实际中的应用远不止于此,以上只是举例性的说明. 事实上,零点定理在实际中有着非常广泛的应用. 限于篇幅,本文不再赘述.

参考文献:

[1]　王玉宝,何彦波,许志梅. 零点定理的活用[J]. 长春师范学院学报:自然科学版,2007(3):36-37.

[2]　梁瑞光,郭强. 介值定理在中学数学中的应用[J]. 长治学院学报,2005(4):70-72.

Application of the theorem of zero

YU Rong [1,2]

(1. School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China;

2. Hubei Province Key Laboratory of Intelligent Robot. Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: Firtly, we demonstrate the theorem of zero. Secondly, via both establishing mathematical models and combining the theorem of zero, we sucessfully deal with a few intersting examples including pulling a rubber band, putting a chair, cutting a cake, climbing a mountain and so on. Lastly, we sum up a general procedure about the applications on the theorem of zero, which can solve some practical problems.

Key words: the theorem of zero; continuous; practice

本文编辑:龚晓宁