

基于状态空间实现的 EDS 频率与时延联合估计

吴云韬¹, 舒娟娟¹, 黄龙庭¹, 李红洋²

(1. 武汉工程大学智能机器人湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430074;

2. 香港中文大学电子工程系, 香港)

摘 要:针对指数衰减正弦信号(EDS)模型提出了状态空间实现的频率、衰减因子及时延联合估计方法. 在此方法中, 得到了一个状态过渡矩阵和观测矩阵, 频率和衰减因子估计由状态过渡矩阵的特征值获得, 时延由观测矩阵和估计的频率和衰减因子得到, 结果具有闭式解, 不需要搜索计算. 由于状态空间方法具有对模型误差敏感的缺点, 因而具有更好的数值稳定性. 仿真实验表明在一定信噪比的情况下, 该方法性能接近相应的 CRLB 下界.

关键词:指数衰减正弦信号; 频率; 时延; 状态空间

中图分类号: TN911

文献标识码: A

doi: 10.3969/j.issn.1674-2869.2011.01.018

0 引 言

指数衰减正弦信号(EDS: Exponentially Damped Sinusoid)是核磁共振成像、线性系统辨识、语音分析、暂态分析和生物信号分析等领域广泛应用的参数化模型^[1]之一. 在加性高斯白噪声条件下, 指数衰减正弦信号的参数估计问题已经得到了较深入的研究. 最大似然方法(ML)^[2]、线性预测(如 KT)^[3]、子空间旋转不变^[4]和子空间正交分解等一些有效的现代谱估计方法被应用到指数衰减正弦模型估计并取得了很好的性能. 最近, 文献[5]提出了一种非迭代前后向线性预测方法估计 EDS 信号模型的非线性参数, 在特定的数据长度情况下, 性能良好. 文献[6]利用离散傅里叶变换(DFT)的峰值获得 EDS 信号模型的衰减因子和频率的估计值, 此方法中的汉宁窗有效的减小了在衰减因子较大且非相干时的估计误差, 但在衰减因子较小和相干的情况下, 估计性能较差. 文献[7]提出了一种迭代自适应方法(Iterative Adaptive Approach 简称 IAA), 这种方法不需要任何参数模型, 也不需要采样是均匀这一假设, 但此方法的计算复杂度较大. 文献[8]提出了一种基于 EDS 信号模型的 IMP 自适应算法, 此方法扩展到信号参数随时间变化的信号模型中.

最近, 基于双基元接收的指数衰减正弦信号

的频率、衰减因子和时延^[9]联合估计问题也引起了学者们的关注. 文献[10]研究了一种在一般 DDS(DDS: Damped and Delayed Sinusoidal)模型中扩展的数据模型—偏衰减时延正弦信号模型(PDDS), 即考虑了多个指数衰信号具有同一个时延下的情形. 文献[11]给出了一种基于 DDS 模型的子带处理方法, 在文中有两种模型参数估计算法—基于子空间算法(DDS-B)和基于傅里叶变换算法(DDS-D). 文献[11]给出了一种基于正弦信号模型的状态空间实现的频率和时延的联合参数估计方法, 但未考虑指数衰减因子.

根据文献[12]、[13]提出的正弦信号模型加以推广, 提出一种基于状态空间实现的指数衰减正弦信号的频率、衰减因子和时延的联合估计方法, 由状态过度矩阵的特征值可以获得其频率和衰减因子估计, 而由观测矩阵及估计的频率及衰减因子可以获得时延估计, 结果具有闭式解, 不需要搜索计算, 其方法具有对模型误差敏感的缺点, 因而具有更好的数值稳定性. 仿真结果表明在低信噪比情况下具有较高的估计精度.

1 信号模型及基本理论

基于双基元的接收信号数据模型可以表示为:

$$r_1(n) = s(n) + q_1(n) \quad (1)$$

收稿日期: 2010-09-26

基金项目: 国家自然科学基金(60802046); 湖北省教育厅科学研究计划项目(Q20091501)

作者简介: 吴云韬(1973-), 男, 苗族, 湖北利川人, 教授, 博士后. 研究方向: 阵列信号处理、自适应信号处理中的信号检测和参数估计、智能信息处理、无线传感器网络中的定位技术等方面.

$$r_2(n) = s(n-D) + q_2(n), n=0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

这里 $r_1(n), r_2(n)$ 是两个接收的信号数据, n

为采样的时间, $s(n) = \sum_{i=1}^P \alpha_i e^{(-d_i + j\omega_i)n}$, 信号幅度 α_i 是未知的复常数, 假定归一化的频率 ω_i 和 d_i 各不相同; $q_1(n)$ 和 $q_2(n)$ 是任意的加性复高斯噪声. 且假定正弦波数目 P 是先验已知或者已由某一检测方法获得 P . 参数 D 表示由两个阵元引起的相对时延, N 为采样数, 我们的目的是由给定的接收数据去估计时延 D 、各频率分量 $\omega_i (i=1, 2, \dots, P)$ 以及相应的各衰减因子分量 $d_i (i=1, 2, \dots, P)$.

首先用接收的信号数据形成一个时间状态空间模型, 即形成下面的两组向量,

$$\mathbf{X}_1(k) = [r_1(k), r_1(k+1), \dots, r_1(k+M-1)]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{X}_2(k) = [r_2(k), r_2(k+1), \dots, r_2(k+M-1)]^T \quad (4)$$

这里 $k=0, 1, \dots, K-1 = N-M+1$, T 表示转置算子, 参数 M 表示每个向量的长度 ($P+1 \leq M \leq N-P+1$). 将(1)和(2)代入(3)及(4)有:

$$\mathbf{X}_1(k) = \mathbf{A}(\omega) \mathbf{s}(k) + \mathbf{Q}_1(k) \quad (5)$$

$$\mathbf{X}_2(k) = \mathbf{A}(\omega) \mathbf{\Delta}(\omega, d, D) \mathbf{s}(k) + \mathbf{Q}_2(k) \quad (6)$$

这里

$$\mathbf{A}(\omega) = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_P]$$

$$\mathbf{a}_m = [1, e^{-d_m + j\omega_m}, \dots, e^{(-d_m + j\omega_m)(M-1)}]^T$$

$$m=1, 2, \dots, P$$

$$\mathbf{s}(k) =$$

$$[\alpha_1 e^{(-d_1 + j\omega_1)k}, \alpha_2 e^{(-d_2 + j\omega_2)k}, \dots, \alpha_P e^{(-d_P + j\omega_P)k}]^T$$

$$\mathbf{Q}_1(k) = [q_1(k), q_1(k+1), \dots, q_1(k+M-1)]^T$$

$$\mathbf{Q}_2(k) = [q_2(k), q_2(k+1), \dots, q_2(k+M-1)]^T$$

$$\mathbf{\Delta}(\omega, d, D) =$$

$$\text{diag}\{e^{-D(-d_1 + j\omega_1)}, e^{-D(-d_2 + j\omega_2)}, \dots, e^{-D(-d_P + j\omega_P)}\}$$

从式(6)可以看出, 频率和衰减因子信息包含在 Vandermonde 矩阵 $\mathbf{A}(\omega)$ 中, 时延信息包含在对角矩阵 $\mathbf{\Delta}(\omega, D)$ 中.

设

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(k) \\ \mathbf{X}_2(k) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\omega) \\ \mathbf{A}(\omega) \mathbf{\Delta}(\omega, d, D) \end{bmatrix} \mathbf{s}(k) + \mathbf{e}(k)$$

$\mathbf{s}(k)$ 表示状态向量, 因此可以形成如下的状态空间模型

$$\mathbf{s}(k+1) = \Phi \mathbf{s}(k) \quad (7)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{B}(\omega, D) \mathbf{s}(k) + \mathbf{e}(k) \quad (8)$$

这里

$$\Phi = \text{diag}[e^{-d_1 + j\omega_1}, \dots, e^{-d_P + j\omega_P}] \quad (9)$$

称为状态过渡矩阵.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\omega) \\ \mathbf{A}(\omega) \mathbf{\Delta}(\omega, d, D) \end{bmatrix} \quad (10)$$

称为观测矩阵. 将由给定的数据去估计出系统矩阵 \mathbf{B} 和 Φ , 如频率和衰减因子已知, 那么可以利用 $\mathbf{\Delta}(\omega, d, D)$ 的结构给出时延 D 的估计.

2 提出的算法

2.1 状态空间算法的实现及信号参数估计

设 $L \geq 2$ 是一给定的整数, 定义 $2ML \times 1$ 向量

$$\mathbf{y}_L(k) = [\mathbf{y}^T(k), \mathbf{y}^T(k+1), \dots, \mathbf{y}^T(k+L-1)]^T$$

通过迭代状态空间模型有

$$\mathbf{y}_L(k) = \Omega_L \mathbf{s}(k) + \mathbf{e}_L(k) \quad k=1, 2, \dots, K-L+1$$

上式中 $\mathbf{e}_L(k)$ 与 $\mathbf{y}_L(k)$ 类似定义,

$$\Omega_L = [\mathbf{B}^T (\Phi \mathbf{B})^T \dots (\Phi \mathbf{B}^{L-1})^T]^T \quad (11)$$

这里 $2ML \times P$ 矩阵 Ω_L 称为状态空间模型的可观测矩阵 (通常定义 $L=P$).

定义 $\mathbf{y}_L(k)$ 的采样协方差矩阵

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}_L}(L) = \frac{1}{K} \sum_{k=L+1}^{K-L+1} \mathbf{y}_L(k) \mathbf{y}_L^H(k-L)$$

设 $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}_L} = \sum_{l=1}^{2ML} \lambda_l \mathbf{u}_l \mathbf{v}_l^H$ 为 $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}_L}$ 的奇异值分解, 这里

λ_l 表示奇异值 (按降序排列), \mathbf{u}_l 和 \mathbf{v}_l 分别表示左、右奇异向量. 因此信号子空间可以由矩阵 $\hat{\Phi} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_P]$ 的列矢量得到. 则状态矩阵 Φ 和观测矩阵 \mathbf{B}_T 能够用下面的形式估计得到

$$\hat{\mathbf{B}}_T = \hat{\Phi}_{1:L} \quad (12)$$

$$\hat{\Phi}_T = \hat{\Phi}_{1:L}^\# \hat{\Phi}_{2:L} \quad (13)$$

这里 $\hat{\Phi}_{k:l}$ 表示从 k 到 l 的块行 (每一个块矩阵具有维数 $2M \times P$), $(\cdot)^\#$ 表示矩阵的伪逆.

设 $\hat{\Phi}_T$ 的特征分解为 $\hat{\Phi}_T = E \Lambda E^{-1}$, 这里 $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_P]$, 从而频率可以由 λ_m 的相角得到 (\angle 表示取相角), 衰减因子可以由 λ_m 的实部取负对数得到, 即

$$\hat{\omega}_m = \angle \lambda_m \quad (14)$$

$$\hat{d}_m = -\ln[\text{Re}(\lambda_m)], m=1, \dots, P \quad (15)$$

再根据 $\mathbf{B}(\omega, D)$ 的定义, $\mathbf{\Delta}(\omega, d, D)$ 的估计为 $\hat{\mathbf{\Delta}}(\omega, d, D) = \hat{\mathbf{B}}_{1:M}^\# \hat{\mathbf{B}}_{M+1:2M}$, 从而时延 D 的估计由下式给出

$$\hat{D} = \frac{\sum_{m=1}^P \angle \hat{\mathbf{\Delta}}_{mm}(\hat{\omega}, \hat{d}, D)}{-\sum_{m=1}^P (-\hat{d}_m + \hat{\omega}_m)} \quad (16)$$

式(16)中 \angle 表示矩阵 $\hat{\mathbf{\Delta}}(\hat{\omega}, \hat{d}, D)$ 的第 m 个对角元素的相角.

2.2 DDS 模型的 CRLB 下界

在基于双基元 DDS 模型中,设

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^P A_i e^{-d_i n + j(w_i n + p_i)} \\ s_D &= \sum_{i=1}^P A_i e^{-d_i(n-D) + j[w_i(n-D) + p_i]} \\ x_i &= e^{-d_i n + j(w_i n + p_i)} \\ x_{iD} &= e^{-d_i(n-D) + j[w_i(n-D) + p_i]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= e^{-(d_1 + d_2 + \dots + d_P)n + j[(w_1 - w_2) - \dots - w_P]n + (p_1 - p_2 - \dots - p_P)} \\ d_D &= e^{-(d_1 + d_2 + \dots + d_P)(n-D) + j[(w_1 - w_2) - \dots - w_P](n-D) + (p_1 - p_2 - \dots - p_P)} \end{aligned}$$

这里 $A_i (i=1, 2, \dots, P)$ 是实振幅, $p_i (i=1, \dots, P)$ 是相角.

先给出此模型的对数似然函数是

$$\begin{aligned} \ln f(r_1, r_2; A_1, \dots, A_P, p_1, \dots, p_P, \\ w_1, \dots, w_P, d_1, \dots, d_P, D) = \\ -N \ln(2\pi) - N \ln \sigma^2 - \\ \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} (r_1 - s)^2 + \sum_{n=0}^{N-1} (r_2 - sD)^2 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

这里 σ^2 是噪声功率.

然后写出 Fisher 信息矩阵,对似然函数中的每个参数求导可以得到 Fisher 信息矩阵中每个元素的表达式,即

$$I_{ij} = \frac{\partial^2 \ln f}{\partial G_i \partial G_j} (i, j=1, \dots, 4P+1) \quad (18)$$

其中, $\mathbf{G} = [A_1, \dots, A_P, p_1, \dots, p_P, w_1, \dots, w_P, d_1, \dots, d_P, D]$, G_i 表示向量 \mathbf{G} 中的第 i 个元素, G_j 表示向量 \mathbf{G} 中的第 j 个元素.

则频率、衰减因子和时延的 CRLB 下界可以由下式得到,令

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}^{-1} (A_1, \dots, A_P, p_1, \dots, p_P, w_1, \dots, w_P, d_1, \dots, d_P, D) \quad (19)$$

每个参数对应的 CRLB 界限就是上式中对角线上的元素数值.

$$CRLB(w_i) = \mathbf{J}(2P+i, 2P+i) =$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [A_i r_1 n^2 (x_i + x_i^*) -$$

$$A_1 \dots A_P n^2 (d + d^*) + A_i r_2 (n-D)^2 (x_{iD} + x_{iD}^*) - A_1 \dots A_P (n-D)^2 (d + d^*)]$$

$$CRLB(d_i) = \mathbf{J}(3P+i, 3P+i) =$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [-A_i r_1 n^2 (x_i + x_i^*) +$$

$$A_1 \dots A_P n^2 (d + d^*) + 4A_i^2 n^2 e^{-2d_i n} -$$

$$A_i r_1 (n-D)^2 (x_{iD} + x_{iD}^*) + A_1 \dots A_P (n-D)^2 (d_D + d_D^*) + 4A_i^2 (n-D)^2 e^{-2d_i(n-D)}]$$

$$CRLB(D) = \mathbf{J}(4P+1, 4P+1) =$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [r_2 A_i (x_{iD} + x_{iD}^*) (w_i^2 -$$

$$\begin{aligned} d_i^2) + 2jr_2 A_i d_i w_i (x_{iD} - x_{iD}^*) + 4A_i^2 d_i^2 e^{-2d_i(n-D)} + \\ A_1 \dots A_P (\sum_{i=1}^P d_i^2) (d_D + d_D^*) + \\ 2jA_1 \dots A_P (\sum_{i=1}^P d_i) (w_1 - \dots - w_P) (d_D^* - d_D) - \\ A_1 \dots A_P (w_1 - \dots - w_P)^2 (d_D^* + d_D)] \end{aligned}$$

3 计算机仿真实验及性能比较

在计算机仿真中,信号 $s(n) = \alpha_1 e^{(-d_1 + jw_1)n} + \alpha_2 e^{(-d_1 + jw_2)n}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/\sqrt{2}$, $w_1 = 0.3\pi$, $w_2 = 0.6\pi$, $d_1 = 0.001$, $d_2 = 0.002$ 和时延 $D = 0.7$ s. 采样时间为 1 s, 独立实验次数为 500. 采样点数 $N = 200$, 取 $L = 2$, $M = 25$. 假定加性噪声为白噪声, $q_i(t)$ ($i=1, 2$) 互不相关. 图 1 分别给出了两个分量的频率估计的均方误差随信噪比的对比图, 图 2 分别给出了两个分量的衰减因子估计的均方误差随信噪比的对比图, 图 3 给出了时延估计的均方误差随信噪比的对比图, 同时基于两阵元数据的 ESPRIT 算法的频率估计结果, 相应的 CRLB 下界也一同给出. 从图 1、图 2 及图 3 中可以看出, 当信噪比大于 -5 dB 时, 上述方法参数估计的均方误差接近于对应的 CRLB 下界, 同时, 该方法和 ESPRIT 方法具有相同的频率及衰减因子估计性能.

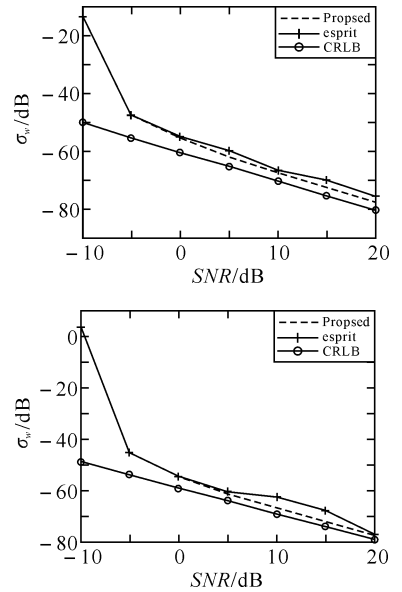


图 1 频率估计的均方误差随信噪比的对比图
Fig.1 Mean square error of frequency estimation versus SNR

注: σ_w 为频率均方误差.

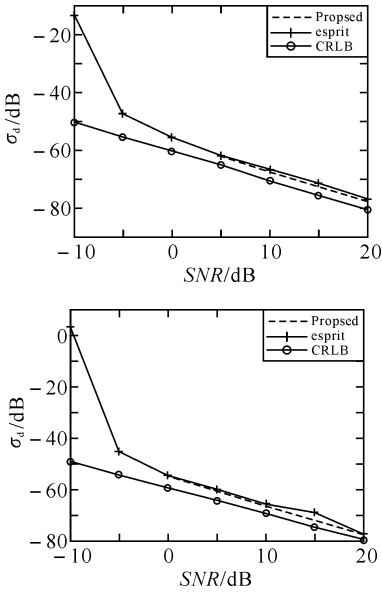


图 2 衰减因子估计的均方误差随信噪比的对比图
Fig.2 Mean square error of damped factor estimation versus SNR

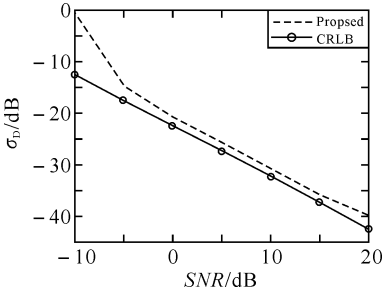


图 3 时延估计的均方误差随信噪比的对比图
Fig.3 Mean square error of Delay estimation versus SNR

注: σ_d 为衰减因子均方误差; σ_D 为时延均方误差.

4 结 语

计算机仿真实验证明了本文的方法性能在低信噪比和较小的衰减因子情况下指数衰减时延正弦信号模型的频率,衰减因子和时延估计都能达到相应的 CRLB 下界.但在衰减因子较大的情况下,性能还有待提高.

参考文献:

[1] 张煜东,颜俊,王水花,等.非参数估计方法[J].武汉工程大学学报,2010,32(7):99-106.

[2] Umesh S, Donald Tufts W. Estimation of Parameters of Exponentially Damped Sinusoids Using Fast Maximum Likelihood Estimation with Application to NMR Spectroscopy Data[J]. IEEE Transactions on signal processing,1996,9(44):2245-2259.

[3] Kumaresan R, Tufts D W. Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise [J]. IEEE Trans on ASSP,1982,30(6):833-840.

[4] Cheng Qi. Optimally Weighted ESPRIT for Parameter Estimation of Damped Signals [J]. Conference on convergent Technologies for Asia-Pacific Region,2003,10(3):1189-1193.

[5] Nandini Kannan, Debasis Kundu. Estimating parameters in the damped exponential model [J]. Signal Processing,2001(81):2343-2351.

[6] Dusan Agrez. A frequency domain procedure for estimation of the exponentially damped sinusoids [C]//International Instrumentation and Measurement Technology Conference,12MTC,2009:1327-1331.

[7] Erik Gudmudson, Peter Stoica, Jian Li. Spectral estimation of irregularly sampled exponentially decaying signals with applications to RF spectroscopy [J]. Journal of Magnetic Resonance,2010:167-176.

[8] Lu J, brown L J. Internal model principle - based control of exponentially damped sinusoids[J]. Int J Adapt Control Signal Process,2010(24):219-232.

[9] 田裕康,胡荣强.可变时延网络控制系统的模和稳定性分析[J].武汉工程大学学报,2010,32(7):94-98.

[10] Remy Boyer, Karim Abed-Meraim. Audio Modeling Based on Delayed Sinusoids [J]. IEE Transactions on Speech and Audio Processing, 2004,2(12):110-120.

[11] Remy Boyer, Karim Abed-Meraim. Damped and Delayed Sinusoidal Model for Transient Signals[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2005, 5 (53): 1720-1730.

[12] Wu Yuntao, H C So, Ching P C. Joint Time delay and Frequency Estimation Via State-Space Realization[J]. IEEE Trans on Signal Processing. Lett,2003,11(10):329-342.

[13] 吴云韬,廖桂生,陈建峰.一种低复杂度的频率、时延联合估计新方法[J].系统工程与电子技术,2003,7(25):777-779.