文章编号:1674－2869(2011)08－0107－04

原始 EPR 佯谬本征态的量子力学

刘雅超,黎　明,吕惠民,唐远河

(西安理工大学应用物理系,陕西 西安 710048)

摘　要:介绍了原始 EPR 佯谬问题所给出的本征态,分析了相关算符间的对易关系,验证了该本征态坐标表象波函数并讨论其量子力学含义.将该本征态在体系动量直积态上展开进而得到其动量表象波函数,分析了动量表象波函数形式与坐标系原点选取的关系及物理含义.结果表明该本征态是动量和坐标的双重纠缠态.

关键词:EPR 佯谬;共同本征态;纠缠态;坐标表象;动量表象

中图分类号:O413.1　　**文献标识码**:A　　**doi**:10.3969/j.issn.1674-2869.2011.08.026

0　引　言

1935 年,Einstein、Podolsky 和 Rosen 合作发表了一篇名为“能够认为量子力学对物理实在的描述是完备的吗?”的文章[1].文中构造一奇特的无自旋二粒子系统,通过两粒子的坐标和动量关联来质疑量子力学的完备性,此即原始的 EPR 佯谬.它和“薛定谔猫态”在历史上一起给出了对纠缠态的最早描述[2].由于粒子动量和坐标算符的本征值都是连续谱,又有经典对应,给问题的讨论和理解都带来困难.后来,经过 Bohm 的重新表述,将问题简化为对只有两个本征值的电子自旋纠缠态的讨论[3].此即 Bohm 版本的 EPR 佯谬,或称 EPRB 思想实验.问题的转机发生在 1964 年,Bell 的工作将纯思辨的思想实验转为可以实验检验的 Bell 不等式[4].之后,1969 年基于光子偏振纠缠的实验方案被提出[5].决定性的实验工作在上世纪八十年代初完成[6-7].实验表明量子力学理论的正确性,也表明纠缠态确实存在.随后基于双光束光振幅关联的连续变量 EPR 纠缠态也被建议并在实验上实现[8-9].而以动量位置纠缠态为基础[10]的连续变量量子通信[11-12]和量子计算[13]的研究进一步促进了对原始 EPR 佯谬的理解[14-15].2004 年,在实验上实现了双光子的动量位置的纠缠态[16].至今,对有质量的粒子(如电子)的动量,坐标或自旋的纠缠态都还没有在实验上实现.而对坐标动量纠缠态的物理理解还有待深入.本文试图不用密度矩阵的方法,而从量子力学的对易关系分析入手,结合对原始 EPR 佯谬文章中所给出的本征态在动量表象和坐标表象的波函数的深入分析,揭示其在不同表象波函数中的特征表现,澄清动量和坐标纠缠态的量子物理内涵.

1　原始 EPR 佯谬

对原始 EPR 佯谬的问题可以简述如下[17]:有一个一维的量子力学系统 S,由粒子 1 和粒子 2 组成.两粒子的坐标算符和动量算符是

$$\hat{x}_j,\hat{p}_i=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}(j=1,2) \tag{1}$$

满足基本对易关系

$$[\hat{x}_1,\hat{p}_1]=i\hbar \tag{2}$$

$$[\hat{x}_2,\hat{p}_2]=i\hbar \tag{3}$$

$$[\hat{x}_1,\hat{p}_2]=[\hat{x}_2,\hat{p}_1]=0 \tag{4}$$

由此可以构造系统 S 的两个对易算符,坐标差算符 $\hat{x}_1-\hat{x}_2$ 及动量和算符 $\hat{p}_1+\hat{p}_2$,它们满足对易关系

$$[\hat{x}_1-\hat{x}_2,\hat{p}_1+\hat{p}_2]=0 \tag{5}$$

于是根据量子力学,它们有共同本征态,而本征值可分别为

$$x_1-x_2=a \tag{6}$$

$$p_1+p_2=0 \tag{7}$$

以这两个算符的本征值为标志,该本征态可记为$|a,0\rangle$.

对于一维的二粒子系统,这是非常奇怪的本征态[18-19]:两个以相反动量运动的粒子居然可以保持它们的距离不变!从经典力学粒子运动的观点来看,这种运动是难以想象的.以至于文献[17]中说,“EPR 文章所举的例子里,所用的态函数虽

收稿日期:2011－04－27

基金项目:西安理工大学青年科学研究计划项目(108－210828);国家自然科学基金(No.10874138)

作者简介:刘雅超(1980－),男,陕西西安人,助教,硕士.研究方向:低维量子系统电学性质.

然在数学上是可能的，但谁也想不出怎样实现这种两个粒子有着相反方向的动量，却又始终保持一定距离的臆想的追随运动．难怪好多人把这场(Einstein 同 Bohr 的)争论只当作是一场不会有结果的空谈．”然而现在人们知道这绝非空谈．对两个光子组成的系统，这样的本征态已在实验室实现[16]．本文的目的是通过量子力学的分析来理解它．探究明白这个经典力学看来不可想象的本征态真正的量子物理内涵．

1.1 对易关系

先从算符的对易关系来分析，当 $\hat{x}_1-\hat{x}_2$ 的本征值 a 非常之大，以致粒子 1 和粒子 2 间的相互作用可以忽略，这正是 EPR 文章所假设的情况[1]．此时系统哈密顿算符 Ĥ 是

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}_1^2}{2m}+\frac{\hat{p}_2^2}{2m} \tag{8}$$

在此假设两粒子有相同的质量．这不会改变笔者将得到的结论．笔者发现

$$[\hat{x}_1-\hat{x}_2,\hat{H}]=\frac{i\hbar}{m}(\hat{p}_1-\hat{p}_2) \tag{9}$$

$$[\hat{p}_1+\hat{p}_2,\hat{H}]=0 \tag{10}$$

这表明，$\hat{x}_1-\hat{x}_2$ 和 $\hat{p}_1+\hat{p}_2$ 的共同本征态 $|a,0\rangle$ 不可能同时是能量算符 $\hat{H}$ 的本征态．又由对易关系(2)式和(3)式可知，$|a,0\rangle$ 也不是算符 $\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{p}_1,\hat{p}_2$ 的本征态；另一方面，(6)和(7)只是表明 x_1 和 x_2 相差为 a；p_1 和 p_2 大小相等，方向相反，并未对 x_1 和 p_2 的取值有任何限制．那么，$\hat{x}_1$ 作用于 $|a,0\rangle$ 有一定的几率取任意本征值 x，相应的 $\hat{x}_2$ 的本征值为 $x-a$；$\hat{p}_1$ 作用于 $|a,0\rangle$ 有一定的几率取任意本征值 p，相应的 $\hat{p}_2$ 的本征值为 $-p$．综上，$|a,0\rangle$ 是粒子位置和动量的双重纠缠态，不可能由某两个具有确定的动量和能量的自由粒子本征态的直积来构成[2]，即不能是

$$|x,p_0\rangle_1\otimes|x-a,-p_0\rangle_2=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0x\right)\otimes\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(-p_0)(x-a)\right] \tag{11}$$

的形式．所以，将由 $|a,0\rangle$ 代表的本征态描述成是具有等大而反向的动量而又保持距离不变的两个粒子是不合适的．因为这种经典力学式的陈述必然假定两个粒子的动量是确定的．事实上，虽然在经典力学里，不能想象粒子同时具有各种不同的动量，而在量子力学里，由于态的叠加原理，这确实是可以的．再从态 $|a,0\rangle$ 在不同表象的波函数来研究它．

1.2 坐标表象

数学上，$|a,0\rangle$ 在坐标表象的波函数 $\psi(x_1,x_2)$ 的表达式为[1-2]

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2-a)\right]\mathrm{d}p=\delta(x_1-x_2-a) \tag{12}$$

分别用算符 $\hat{x}_1-\hat{x}_2$ 和 $\hat{p}_1+\hat{p}_2$ 作用于上式，有

$$(\hat{x}_1-\hat{x}_2)\psi(x_1,x_2)=(\hat{x}_1-\hat{x}_2)\delta((x_1-x_2)-a)=a\delta((x_1-x_2)-a) \tag{13}$$

$$(\hat{p}_1+\hat{p}_2)\psi(x_1,x_2)=$$
$$-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2-a)\right]\mathrm{d}p=$$
$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}(p-p)\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2-a)\right]\mathrm{d}p=0 \tag{14}$$

由以上两式可以确认(12)式就是我们所讨论的本征态 $|a,0\rangle$ 在坐标表象的波函数．该函数 $\delta(x_1-x_2-a)$ 表明，粒子 1 和粒子 2 的位置处于纠缠状态，即虽然坐标 x_1 和 x_2 可以任意取值，但它们之差必须保持不变，始终为 a．

1.3 动量表象

为了进一步分析本征态 $|a,0\rangle$ 的内涵，将 $\psi(x_1,x_2)$ 在二粒子体系的动量本征态上展开

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(p_1,p_2)\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_1x_1\right)\cdot\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_2x_2\right)\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2 \tag{15}$$

其中 $\varphi(p_1,p_2)$ 为本征态 $|a,0\rangle$ 在动量表象的波函数，由表象变换可得

$$\begin{aligned}\varphi(p_1,p_2)=&\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x_1,x_2)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_1x_1\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_2x_2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\\&\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x_1-x_2-a)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_1x_1\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_2x_2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\\&\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta[(x_1-0)-(x_2-(-a))]\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_1x_1\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_2x_2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\\&\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x_1'-x_2')\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_1(x_1'+0)\right]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_2(x_2'+(-a))\right]\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'=\\&\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_10\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_2(-a)\right]\delta(p_1+p_2)\end{aligned} \tag{16}$$

此波函数表明，若将粒子 1 所在位置取为坐标原点，即粒子 1 坐标为 0，则粒子 2 坐标为 $-a$，坐标差即距离为 a；而动量波函数中 $\delta(p_1+p_2)$ 因子的存在则说明两粒子的动量存在纠缠，即取值必须始终等大反号.

或者，可将粒子 2 所在位置取为坐标原点，则有

$$\begin{aligned}\varphi(p_1,p_2)=&\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta[(x_1-a)-(x_2-0)]\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_1x_1\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_2x_2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\\&\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x_1{}'-x_2{}')\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_1(x_1{}'+a)\right]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_2(x_2{}'+0)\right]\mathrm{d}x_1{}'\mathrm{d}x_2{}'=\\&\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_1a\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_20\right)\delta(p_1+p_2)\end{aligned}\tag{17}$$

由上可知，在此参考系下，粒子 1 坐标为 a，粒子 2 坐标为 0，距离依然为 a，动量纠缠保持不变.

而若将两粒子的质心位置取为坐标原点，所得波函数将更为对称，此时，

$$\begin{aligned}\varphi(p_1,p_2)=&\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left[\left(x_1-\frac{a}{2}\right)-\left(x_2+\frac{a}{2}\right)\right]\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_1x_1\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_2x_2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\\&\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x_1{}'-x_2{}')\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_1\left(x'+\frac{a}{2}\right)\right]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_2\left(x_2{}'-\frac{a}{2}\right)\right]\mathrm{d}x_1{}'\mathrm{d}x_2{}'=\\&\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_1\ \frac{a}{2}\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_2\left(-\frac{a}{2}\right)\right]\delta(p_1+p_2)\end{aligned}\tag{18}$$

笔者注意到，当 $P_1\to -p_2$，$p_2\to -p_1$，波函数(18) 保持不变，而波函数(16) 和(17) 互换.

事实上，鉴于二粒子质心位置和动量的对易关系 $[(\hat{x}_1+\hat{x}_2)/2,\hat{p}_1+\hat{p}_2]=i\hbar$，本征态 $|a,0\rangle$ 对质心位置完全没有限制. 表现为任取质心坐标为 x_0，$|a,0\rangle$ 在动量表象的波函数(18) 保持不变.

$$\begin{aligned}\varphi(p_1,p_2,x_0)=&\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_1\left(x_0+\frac{a}{2}\right)\right]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_2\left(x_0-\frac{a}{2}\right)\right]\delta(p_1+p_s)=\\&\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_1\ \frac{a}{2}\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_2\left(-\frac{a}{2}\right)\right]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(p_1+p_2)x_0\right]\delta(p_1+p_2)=\\&\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_1\ \frac{a}{2}\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_2\left(-\frac{a}{2}\right)\right]\delta(p_1+p_2)=\varphi(p_1,p_2)\end{aligned}\tag{19}$$

而对波函数(16)和(17)，任取粒子 1 或粒子 2 的位置坐标，它们亦保持不变.

2　结　语

本研究从量子对易关系和坐标，动量表象波函数等不同方面考察了原始 EPR 佯谬中所给出的本征态，分析表明该本征态并非两个粒子动量本征态的直积态，而是二粒子体系的动量和坐标的双重纠缠态. 纠缠态是量子力学态叠加原理的奇特展现，是完全的量子力学效应，根本没有经典对应. 而之前人们却不自觉地从经典物理出发对该态的加以描述和理解，自然会觉得奇怪了. 可以指出，由(2～4)式出发还可以构造另一组对易算符 $\hat{x}_1+\hat{x}_2$ 和 $\hat{p}_1-\hat{p}_2$，满足 $[\hat{x}_1+\hat{x}_2,\hat{p}_1-\hat{p}_2]=0$. 它们的共同本征态也是动量和坐标的双重纠缠态. 可以用本文的方法加以讨论. 而探讨由一对正反粒子构成的二粒子系统[20]的纠缠态在物理上会更加具有吸引力.

参考文献：

[1] Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can Quantum Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? [J]. Phys Rev, 1935, 47:777 – 780.

[2] 曾谨言. 量子力学(卷 II)[M]. 3 版. 北京：科学出版社，2000：35 – 36，46.

[3] Bohm D. Quantum Theory [M]. New York：Printice Hall，1951.

[4] Bell J S. On the einstein – podolsky – rosen paradox [J]. Physics，1964，1(3)：195 – 200.

[5] Clauser J F，Horne M A S A，Holt R A. Proposed Experiment to Test Local Hidden – Variable Theories [J]. Phys Rev Lett，1969，23(15)：880 – 884.

[6] Aspect A，Grangier P，Roger G. Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem [J]. Phys Rev Lett，1981，47(7)：460 – 463.

[7] Aspect A，Grangier P，Roger G. Experimental Realization of Einstein – Podolsky – Rosen – Bohm Gedanken Experiment：A New Violation of Bell's Inequalities [J]. Phys Rev Lett，1982，49(2)：91 – 94

[8] Reid M D. Demonstration of the Einstein – Podolsky – Rosen Paradox Using Nondegenerate Parametric

Amplification[J]. Phys Rev A,1989 40(2): 913 - 923.

[9] Ou Z Y, Pereira S F, Kimble H J, et al. Realization of the Einstein - Podolsky - Rosen paradox for Continuous Cariables[J]. Phys Rev Lett, 1992, 68 (25): 3663 - 3666.

[10] Vaidman L. Teleportation of Quantum States [J]. Phys Rev A, 1994,49(2):1473 - 1476.

[11] Braunstein S L, Kimble H J. Teleportation of Continuous Quantum Variables[J]. Phys Rev Lett, 1998, 80(4):869 - 872.

[12] Braunstein S L, Loock P. Quantum Information with Continuous Variables [J]. Rev Mod Phys, 2005, 77: 513 - 577.

[13] Lloyd S, Braunstein S L. Quantum Computation over Continuous Variables [J]. Phys Rev Lett, 1999,82(8): 1784 - 1787.

[14] 荆杰泰，张俊香. 结合双模压缩真空态对 EPR“佯谬”与量子力学几率波的统一性解释[J]. 量子光学学报,2002, 8 (2) : 47 - 50.

[15] 赵超樱，谭维翰. 在非简并参量放大系统中 EPR 佯谬的最佳实现[J]. 物理学报，2006，55(1) : 19 - 23.

[16] Howell J C, Bennink R S, Bentley S J, et al. Realization of the Einstein - Podolsky - Rosen Paradox Using Momentum - and Position - Entangled Photons from Spontaneous Parametric Down Conversion [J]. Phys Rev Lett, 2004, 92 (21): 210403.

[17] 关洪. 量子力学的基本概念 [M]. 北京:高等教育出版社,1999:235 - 237.

[18] Ni G J, Guan H, Zhou W M, et al. Anti - particle in the Light of Einstein - Podolsky - Rosen Paradox and Klein Paradox [J]. Chinese Phys Lett, 2000, 17(6):393 - 395.

[19] 倪光炯,陈苏卿. 高等量子力学[M]. 2 版. 上海: 复旦大学出版社，2004:378 - 379.

[20] 刘雅超，黎明. 相对论量子力学方程求解的新方案[J]. 武汉工程大学学报，2010,32 (7) : 107 - 110.

Quantum mechanics analysis of eigenstate in original EPR paradox

LIU Ya - chao*, *LI Ming*, *LV Hui - min*, *TAN Yuan - he

(Department of applied physics, Xi' an University of Technology, Xi' an 710048, China)

Abstract: The eigenstate existing in the problem of EPR paradox is introduced. The commutation of related operators is analyzed and the wave - function in coordinate representation of the eigenstate is verified and its physical signification is discussed. The eigenstate is expended in the direct product space of the moment eigenstates of a two - particle system, subsequently the wave - function in momentum representation is obtained. The relation of the form of the wave - function in momentum representation and the selection of the origin of coordinates, including its physical meaning was analyzed. Results showed that the eigenstate was a entangled state of the coordinate and momentum.

Key words: the EPR paradox; the common eigenstate; entangled state; coordinate representation; momentum representation

本文编辑:张瑞