第34卷第8期　　武 汉 工 程 大 学 学 报　　Vol. 34 No. 8
2012年08月　　J. Wuhan Inst. Tech.　　Aug. 2012

文章编号:1674－2869(2012)08－0046－04

非概率响应面法在结构可靠性中的应用

陈旭勇
(武汉工程大学环境与城市建设学院, 湖北 武汉 430074)

摘　要:为了解决极限状态不能明确表达的复杂结构非概率可靠性指标的求解,将传统的响应面法和改进一维优化算法相结合,提出非概率相应面法,并给出了程序化思路. 为了验证所提方法的有效性,以一悬臂梁为算例,将非概率相应面法的计算结果与传统响应面法及解析方法的结果进行对比,验证了本文的计算方法精度较高,与解析法计算的结果一致,不需特殊的数学处理,是传统响应面法的扩展,更易接受.

关键词:区间模型; 单调性; 迭代算法; 桥梁设计
中图分类号:U443　　**文献标识码**:A　　**doi**:10.3969/j.issn.1674-2869.2012.08.012

0 引 言

优化搜索法是进行非概率可靠性研究的主要工具,其主要计算量花费在搜索验算点,避免了区间运算,因此,不存在区间扩张的问题. 验算点又称最可能失效点(Most Probable failure Point,简称MPP),可用于判定结构的安全可靠性能. 非概率可靠性指标本质上是标准化空间中坐标原点到失效面的最短距离(按无穷范数度量),即坐标原点到MPP的距离,其求解过程是一个有等式约束的优化问题. 在极限状态函数不是很复杂的情况下,郭书祥[1]提出了3种计算方法:定义法、转换法及优化法. 这些方法各有其特点和不足,对于定义法,在极限状态方程较复杂的情况下,计算工作量非常大,甚至计算无法实施;转换法主要实用于区间变量的单调性易于确定的情况,但对于非线性方程,多数区间变量的单调性不易确定;而优化法是一种近似解法,且对于复杂函数,其上、下边界往往不易求得. 也可以经简单优化法求解[2],一般情况下,极限状态函数形式复杂,没有统一规律可循,需要采用优化、加速、迭代进行搜索求解. 罗阳军等[3]研究发现,当极限状态函数非线性程度较高时,迭代过程经常会发生迂回振荡现象,甚至不收敛. 为了解决此问题,在Hasofer－Lind Rackwitz－Fiessler(HL－RF)算法的基础上,针对非概率可靠性指标的计算,以夹角 θ 值的相对大小为检测严重迂回振荡的判据,提出了一种能有效消除迂回振荡的修正迭代算法. 马超等[4]针对凸集模型比例因子的非概率可靠性指标相对隐式极限状态方程难以求解问题,提出一种基于支持向量机(support vector machine, 简称SVM)回归的非概率可靠性指标分析方法. 针对区间运算非概率可靠性指标扩张的问题,文献[5]利用仿射型表示变量的不确定性,由仿射运算计算出结构的响应区间(功能函数的上下界),并由响应区间与其许用区间获得非概率可靠性指标. 江涛等提出了响应面法的非概率可靠性指标求解[6],主要通过多样本点进行响应面的拟合,再求解非概率可靠性指标,通过计算验证了所提方法的有效性,但该方法没有明确样本点选择多少是合适的. 江涛等[7]提出了一维优化算法,证明了非概率可靠性指标只可能存在于标准化区间变量张成的对称凸域及其扩展空间中通过原点和凸域顶点的有限条射线与失效面的某一个交点处,在此证明的基础上提出了求取非概率可靠性指标的一维优化方法,该方法将求取非概率可靠性指标转化成有限个一元代数方程的求根问题. 一维优化方法能很好的计算非概率可靠性指标,优于其它计算方法,但当方程的变量较多时,计算量较大. 在此基础上,陈旭勇等[8]提出了改进一维优化算法,使得非概率可靠性指标的计算量极大减小,但主要针对极限状态方程明确的求解. 总体来说,通用的有效搜索方法并不存在,原因是算法上客观存在数学困难,但研究者们根据具体的研究对象可以寻求解决问题的

收稿日期:2012-03-28
基金项目:武汉工程大学科学研究基金(13115086)
作者简介:陈旭勇(1979-),湖北武汉人,讲师,博士. 研究方向:桥梁可靠性评估、桥梁检测与加固改造、大跨度桥梁仿真分析.

途径.因此,为了非概率可靠性理论在实践工程中得到有效利用,发展一种有效的非概率可靠性计算方法是必要的.

1 非概率响应面法

1951 年,Box 和 Wilson 最早提出了响应面法(RSM),通过一系列的输入与对应的响应拟合一个近似功能函数,用近似功能函数模拟实际功能函数.实际工程中,极限状态方程一般没有解析表达式,结构是用有限元分析得到相应数值,因此,传统的可靠性方法不能求解.在此基础上,Faravelli 等[9]首次将响应面法引入到概率模型中求解可靠性问题,此后,响应面法在概率模型中得到了极大的发展并用于实践工程中.响应面法中近似的响应面函数的模拟精度和计算效率是最关心的问题,函数的次数越高,模拟的精度将越高,所需的样本点越多,其计算量较大,效率比较低,同时,精度不一定有较大的提高.因此,找到一计算效率高且模拟精度也高的响应面是科学家关心的问题.大量的研究显示,二次多项式能兼顾精度和效率的要求.苏永华等[10]对含一次项及二次交叉项与不带交叉项的二次多项式的响应面函数进行了对比研究,发现两者精度相差不大,但后者的计算效率高得多.程进[11]对 5 种响应面函数模型进行对比分析,得出了不带交叉项的二次多项式的响应面函数所需样本点最少,但计算精度较高的结论.因此,工程中一般用不带交叉项的二次多项式的 RSM 法进行求解.构造失效面函数:

$$z = g(x) = a + \sum^{n} b_i x_i + \sum^{n} c_i x_i^2 \qquad (1)$$

式(1)中:$a, b_i(i = 1,2,\cdots,n), c_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 均为待定系数,共 $2n+1$ 个待定系数.

对于结构的非概率可靠性求解,计算中需进行结构分析、方程组求解、非概率可靠性指标的求解.因此,要用到两个工具,如结构分析可采用商业有限元软件 MIDAS、ANSYS 或 SAP 等.方程组及可靠性指标的求解可利用 MATLAB 进行编程得到.

1.1 非概率响应面法

目前,对结构进行可靠性评估的响应面研究与应用主要集中在随机变量,而区间变量不同于随机变量,因此,不能用随机变量的响应面法进行可靠性分析.江涛[6]等将 RSM 的思想与基于区间变量的非概率可靠性模型结合,提出了一种基于区间模型的非概率响应面法,该法能很好地解决极限状态方程没有解析表达式的结构非概率可靠性问题,是目前解决此类结构的一种有效方法.但该算法存在两个问题:一是该模型选择的含一次项及和二次交叉项函数,当变量较大时,计算量非常大;二是样本点数量的选择不明确,从而对其结果无法验证.本节在已有的研究基础上,构造出一种基于响应面法和改进一维优化算法相结合的非概率响应面法.

对 n 个区间变量 $x_1, x_2, ..., x_n$ 的情况,二次多项式表达为同公式(1).应用响应面法构造一函数来近似模拟真实功能函数,再利用改进一维优化算法[8]进行非概率可靠性分析的步骤如下:

a. 选取 $2n+1$ 组初始点 $x_1{}^0$, $x_2{}^0, ..., x_n{}^0$ 和 $x_1{}^0 \pm x_1{}^r$, $x_2{}^0 \pm x_2{}^r$, …, $x_n{}^0 \pm x_n{}^r$,其中 $x_1{}^0$, $x_2{}^0, ..., x_n{}^0$ 为区间变量中值,$x_i{}^r$ 为 $x_i{}^0$ 的离差,利用结构有限元数值分析方法求得 $2n+1$ 个功能函数值 g.

b. 求解线性方程组(1)式,得到 $2n+1$ 个待定系数 $a, b_i, c_i(i = 1,2,\cdots,n)$,从而得到由二次多项式表示的响应面函数 $M^0 = g(x^0)$(初始响应面函数).

c. 将 $x_i{}^0(i = 1, 2, ..., n)$ 标准化,即 $x_i{}^0 = x_i^c + x_i{}^r\delta_i{}^0$,代入初始响应面函数 $g(x^0)$ 中,得到 C_δ^∞ 空间中的标准化响应面函数 $G(\delta^0)$.由于初始点选取的任意性,一般情况下 $G(\delta^0) \neq 0$.

d. 令初始响应面函数 $G(\delta) = 0$,利用改进一维优化算法求解非概率可靠性指标 $\eta^{*(k)}$,其中 $k = 0, 1, \cdots$ 为迭代步数[11].

e. 利用上步求得的 $\eta^{*(k)}$,确定新的验算点.在改进一维优化算法确定单调性的基础上:若 $\frac{\partial M}{\partial \delta_i} > 0$,则 $x_i^{k+1} = x_i^c - x_i^r\eta^{*(k)}$;若 $\frac{\partial M}{\partial \delta_i} < 0$,则 $x_i^{k+1} = x_i^c + x_i^r\eta^{*(k)}$.从而确定了新的验算点 x_i^{k+1}.

f. 选取 $2n+1$ 组验算点 $x_1{}^{k+1}$, $x_2{}^{k+1}, ...$, $x_n{}^{k+1}$ 和 $x_1{}^{k+1} \pm mf\, x_1{}^{k+1}$, $x_2{}^{k+1} \pm mf\, x_2{}^{k+1}, ...$, $x_n{}^{k+1} \pm mf\, x_n{}^{k+1}$,其中 f 对应的各变量变异系数,m 为离差控制系数,在迭代计算中,第一个迭代步($k=1$)时 $m = 1/2$,以后($k>1$)取 $m = 1/4$,利用结构有限元数值分析方法求得 $2n+1$ 个功能函数值 g,求解线性方程组(1)式,得到第 k 个迭代步的 $2n+1$个待定系数 $a, b_i, c_i(i = 1, 2, \cdots, n)$,从而得到第 k 个迭代步的响应面函数 $M^k = g(x^k)$.

g. 重复第 **d** ~ **f** 步,进行非概率可靠性指标的求解,直到满足收敛条件:$|M^k| < \varepsilon |M^0|$ 和 $|\eta^{*(k)} - \eta^{*(k-1)}| < \varepsilon |\eta^{*(k-1)}|$,迭代终止,取非概率可靠性指标 $\eta = \eta^{*(k)}$,其中 ε 为容许误差

极限值,本文中 ε 按 10^{-4} 取值,若收敛条件不满足,迭代两次后,用线性插值得新非概率可靠性指标:

$$\eta^{(k+1)}=\eta^{(k)}+(\eta^{(k-1)}-\eta^{(k)})\frac{G(x^{(k)})}{G(x^{(k)})-G(x^{(k-1)})} \tag{2}$$

以加速迭代过程.

1.2 程序实现

在求得近似功能方程后,可借助现有编程软件 MATLAB 进行求解,现对程序中主要问题进行阐述. 上述步骤中除判断函数的单调性外,其它都容易实现,判断函数的单调性需进行自编程,现阐述其主要思路及证明.

将式(1)进行标准化得:

$$M=g(x)=a+\sum^{n}b_i(x_i^c+x_i^r\delta_i)+\sum^{n}c_i(x_i^c+x_i^r\delta_i)^2 \tag{3}$$

对 δ_i 求一阶偏导得:

$$\frac{\partial M}{\partial \delta_i}=b_ix_i^r+2c_ix_i^r(x_i^c+x_i^r\delta_i)=f(\delta_i) \tag{4}$$

由于式(4)中存在变量,不易用程序判断其正负. 因此,对式(4)再求导,得:

$$\frac{\partial M^2}{\partial^2\delta_i}=2c_i(x_i^r)^2 \tag{5}$$

式(5)中 $(x_i^r)^2>0$,c_i 为已知量,故式(5)的正负性易确定,即式(4)的单调性可确定,同时,由非概率响应面法中易求得 δ_i 的取值范围 $|\delta_i|<\lambda$,将 λ 及 $-\lambda$ 代入式(4)中. 两种情况下,若 $f>0$,则可得 $\frac{\partial M}{\partial \delta_i}>0$,同理,若 $f<0$,则可得 $\frac{\partial M}{\partial \delta_i}<0$,从而判断了式(3)其单调性,实现程序化.

2 算例分析

如图 1 所示悬臂梁[6],梁长 $L=1$ m,梁高 $h=0.2$ m,梁宽 $b=0.1$ m,绕 z 轴的转动惯量 $I_z=6.67\times10^{-5}\,\mathrm{m}^4$,弹性模量 $E\in[21\times10^{11},2.3\times10^{11}]$ N/m^2. y 轴方向集中荷载 $P\in[800,1\,000]$Pa. 自由端容许挠度 $f_{cr}\in[2.4\times10^{-5},2.6\times10^{-5}]$ m. 假定自由端挠度输出 $f>f_{cr}$ 时,结构发生失效. 用本文所提非概率响应面法和失效点寻优法求结构的非概率可靠性指标 η.

建模过程:将长 1 m 的悬臂梁划分 10 个单元,一端固结,即 6 个变量都约束,梁高和梁宽为一定值,代入不同的 E 和 P 值,有限元分析得到自由端不同的挠度值 f. 构造响应面方程 $z=f-f_{cr}$,按照 1.1 节介绍的计算步骤,采用非概率响应面法得到的结果见表 1.

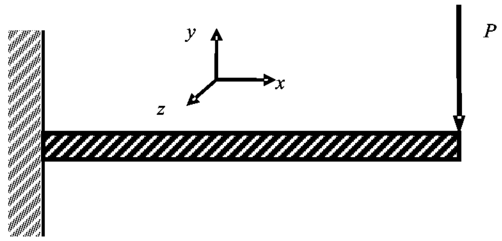

图 1 悬臂梁受力图

Fig. 1 Force diagram of cantilever beam

表 1 非概率响应面法

Table 1 Non-probabilistic response surface method

迭代次数	η^*	R^*-S^*/m	离差控制系数	η
1	0(中值代入)	0.455 567 67	1	1.072 038
2	1.072 038	−0.012 360 23	1/2	1.044 748
3	1.043 720	0.000 474 69	1/4	1.044 340
4	1.004 473	0.000 000 49	1/4	1.044 877
5	1.044 768	2×10^{-12}	1/4	1.044 768

表 1 中从第 3 次开始是前两次的内插值.

从表 1 可知,非概率响应面法得到的非概率可靠性指标 $\eta=1.044\,768$,为了验证结果的正确性和有效性,分别与文献[6]采用的方法和解析法计算的结果进行对比,见表 2.

表 2 各种计算方法比较

Table 2 Comparison of different caculating method

方法	文献[6]		解析法	非概率响应面法
	12 样本点	20 样本点		
η	1.044 698	1.044 680	1.044 768	1.044 768
有限元计算次数	12	21	\	25
其它辅助方法	数学迭代	数学迭代	\	\

从表 2 分析可得以下结论:

a. 本文提出的非概率响应面法得到的结果很好,与解析值一致(有限位小数内),从而验证了方法的有效性.

b. 非概率响应面法虽然有限元计算的次数较文献[6]多,但由于它不需进行数学处理,是传统的随机响应面法的扩展,更易被接受,且其精度较文献[6]高.

c. 文献[6]中 20 样本点得到的值比 12 样本点的效果差(相对解析),使得样本点个数的选择不明确.

d. 通过以上分析,对极限状态方程不易确定结构,非概率响应面法是一种理想的算法.

3　结　语

对于极限状态方程没有解析表达式的结构，构造出一种基于响应面法和改进一维优化算法相结合的单循环迭代法 - 非概率响应面法，并给出了相应的计算步骤，同时，阐述了程序化的思路．通过一算例，将本文所提算法与解析法及文献[6]方法进行比较，证明了本文所提方法计算结果准确、效率高．

参考文献：

[1]　郭书祥，张陵，李颖．结构非概率可靠性指标的求解方法[J]．计算力学学报，2005，22(2)：227-231.

[2]　LUO Y J，Kang Z，Luo Z，et al. Continuum topology optimization with non-probabilistic reliability constraints based on multi-ellipsoid convex model[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization，2009，39(3)：297-310.

[3]　罗阳军，亢战．超椭球模型下结构非概率可靠性指标的迭代算法[J]．计算力学学报，2008，25(6)：747-752.

[4]　马超，吕震宙．隐式极限状态方程的非概率可靠性分析[J]．机械强度，2009，31(1)：45-50.

[5]　江涛，陈建军，张弛江．区间模型非概率可靠性指标的仿射算法[J]．机械强度，2007，29(2)：251-255.

[6]　江涛，陈建军，张建国，等．基于区间模型的响应面法[J]．机械设计与研究，2005，21(6)：12-16.

[7]　JIANG TAO，CHEN JIAN-JUN，XU YA-LAN. A semi-analytic method for calculating non-probabilistic reliability index based on interval models[J]. Applied Mathematical Modelling，2007，31(7)：1362-1370.

[8]　CHEN XU-YONG，FAN JIAN-PING. Modified scheme based on semi-analytic approach for computing non-probabilistic reliability index[J]. Acta Mechanica Solida Sinica，2010，23(2)：115-123.

[9]　FARAVELLI. Response surface approach for reliability analysis[J]. J Engng Mech ASCE，1989，115(12)：2763-2781.

[10]　苏永华，赵明华，蒋德松，等．响应面方法在边坡稳定可靠度分析中的应用[J]．岩石力学与工程学报，2006，25(7)：1417-1424.

[11]　程进．基于响应面法的几何非线性结构概率响应分析[J]．同济大学学报：自然科学版，2006，34(9)：1148-1151.

Application of non-probabilistic response surface method to structual reliability

CHEN Xu-yong

(School of Environment and Civil Engineering，Wuhan Institute of Technology，Wuhan 430074，China)

Abstract：To provide a programmed idea to effectively solve the problem that complex non-probabilistic reliability index cannot specifically presents by limit state equation. we put forward the non-probabilistic response surface method，combining the traditional response surface method with improved one-dimensional optimization method. To verify the effectiveness of the proposed method，based on the cantilever beam，we compared the results using the method proposed and the existing method. we found that the calculated results have a good accuracy and in accordance with the experimental results using analytic methods. Besides，the proposed method is the extension of traditional response surface method，thus it is easier to be accepted and no need of special mathematical treatment.

Key words：interval model；monotonicity；iterated algorithm；bridge design

本文编辑：龚晓宁