

分片铺设压电梁弯曲分析的无网格法

袁学帅

(内蒙古民族大学数学学院,内蒙古 通辽 028043)

摘要:由不同材料层合而成的层合压电结构中,各层之间的材料的不连续性使得采用无网格配点法处理此类问题时的精度降低.为解决这一问题,将整个问题区域根据材料属性划分成不同的子区域,在每个子区域内采用无网格配点法.为实现各子区域的“粘合”,在子区域的公共边界上分别施加力、电相容性条件和位移、电势连续性条件,导出子区域下的无网格配点法;并应用该方法对层合压电结构在不同铺设方式下的弯曲进行分析并比较.结果表明:分片铺设压电片时,对同样体积大小的压电材料,不同的压电布置会产生不同的对形变的控制效果;采用上下对称粘贴的的铺设方式能实现较好的控制效果.

关键词:层合梁;压电;分片铺设;配点法

中图分类号: O24

文献标识码: A

doi: 10.3969/j.issn.1674-2869.2014.01.015

0 引言

压电材料是一种智能材料,当压电晶体受外力作用发生形变时,在它的表面上出现异号极化电荷,从而形成电场;同样地,当对压电晶体施加一电场时,由极化电荷作用而产生应变和应力.基于上述特点,压电材料成为智能结构传感器、驱动器的首选材料.由于压电材料的力电耦合性,使解析求解压电结构问题时非常困难,故寻求合理的数值方法对于求解压电问题具有重要意义.

目前,利用无网格法在压电结构力学分析取得了一定的成果. Liu等^[1]采用基于径向基函数插值的方法处理层合压电结构的静态挠度问题, Liew等^[2]用无单元伽辽金方法在力电的共同作用下分析复合梁、板,上述都是基于弱式的方法. Chen等^[3]采用局部径向基配点法,解决了由不同材料层合而成的板、梁在力的作用下的应力应变问题.然而,类似的思想却很少用在压电层合材料问题中.

基于径向基函数近似的配点法具有实现简单和指数收敛性等优点^[4],然而在处理力电耦合的压电层合结构时,由于各层之间的材料属性不同而破坏了材料之间的连续性,光滑和全局的径向基函数在解决这类问题时所得到的数值解往往精确度不高、稳定性差.基于上述缺点,可对整个求解域根据不同材料属性划分成相应的子区域,在子区域内采用无网格配点法,然后在子区域的公

共边界分别施加位移、电势连续性条件和力、电相容性条件.这样就使不同材料之间“粘合”起来,最后组装总刚度矩阵,得出了求解层合压电结构的子区域配点法,并已验证此方法增强了数值解的精确性和稳定性.本文继续应用该方法,在不同的铺设方式、铺设位置下,分析压电结构的弯曲效果.

1 径向基函数近似

考虑二维区域 Ω 内的一个场函数 $w(\mathbf{x})$,首先对整个区域进行离散. \mathbf{x}_0 为区域内计算点,其支撑域内有 n 个节点 $\mathbf{x}_i (i=1, 2, \dots, n)$,可插值得到场函数 $w(\mathbf{x})$ 在支撑域中的近似函数^[5]

$$w(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x}) a_i + \sum_{j=1}^m P_j(\mathbf{x}) b_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} + \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}, \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{a}^T = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad \mathbf{b}^T = \{b_1, b_2, \dots, b_m\},$$

$$\mathbf{R}^T = \{R_1(\mathbf{x}), R_2(\mathbf{x}), \dots, R_n(\mathbf{x})\},$$

$$\mathbf{P}^T = \{P_1(\mathbf{x}), P_2(\mathbf{x}), \dots, P_m(\mathbf{x})\},$$

$R_i(\mathbf{x})$ 是关于 \mathbf{x} 、 \mathbf{x}_i 的距离 r_i 的径向基函数, $P_j(\mathbf{x})$ 为多项式基函数. 多项式基的个数取决于对重构的要求,一般来说,二维线性基取

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y\}, \quad m = 3.$$

二维二次基取

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}, \quad m = 6.$$

其中 a_i, b_j 为待定系数,通过支撑域内的 n 个节点的插值确定.使式(1)满足计算点 x 周围 n 个节点 $x_i(i=1, 2, \dots, n)$ 的值,将得到 n 个线性方程:

$$\mathbf{Q}\mathbf{a} + \mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{W}, \quad (2)$$

其中,

$$\mathbf{W} = \{w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n\}^T, \mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_{ij})_{n \times n} = (\mathbf{R}_j(x_i))_{n \times n},$$

$$\mathbf{T} = (\mathbf{T}_{ij})_{n \times m} = (\mathbf{P}_j(x_i))_{n \times m}$$

然而,方程组(2)具有 n 个方程,未知数的个数却有 $n+m$ 个,因此可加入限制条件^[6]

$$\sum_{j=1}^n P_j(x_j) a_j = \mathbf{T}^T \mathbf{a} = 0, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

联立(2)、(3),可得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

令 $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$,当 \mathbf{G} 为非奇异时,可求出

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

将式(5)代入式(1),得到

$$w^h(x) = [\mathbf{R}^T \ \mathbf{P}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = [\mathbf{R}^T \ \mathbf{P}^T] \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = [\mathbf{R}^T \ \mathbf{P}^T]$$

$$\bar{\mathbf{G}}_1 \mathbf{W} = \Phi(x) \mathbf{W}, \quad (6)$$

其中, $\bar{\mathbf{G}}_1$ 为矩阵 \mathbf{G}^{-1} 的前 n 列组成的子矩阵,

$\Phi(x)$ 为形函数,且

$$\Phi(x) = [\mathbf{R}^T \ \mathbf{P}^T] \bar{\mathbf{G}}_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}, \quad (7)$$

式中 $\varphi_i(i=1, 2, \dots, n)$ 为 $\Phi(x)$ 的分量.

2 压电层合材料方程

2.1 子区域划分

在层合压电问题中,不同的材料有不同的材料属性,各微分算子在不同的材料中会有很大差异.若将压电结构作为整体考虑会引起计算精度的降低.基于此类问题,可将不同的压电材料分区域处理.为简便起见,以两个区域为例.考虑区域 Ω (边界为 $\partial\Omega$) 由两个不同的开区域 Ω^1 和 Ω^2 组成,其边界分别为 $\partial\Omega^1, \partial\Omega^2$, 公共边界为 S^{12} , (如图1所示).定义闭区域: $\bar{\Omega}^1 = \Omega^1 \cup \partial\Omega^1$, $\bar{\Omega}^2 = \Omega^2 \cup \partial\Omega^2$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \bar{\Omega}^1 \cup \bar{\Omega}^2$. 设位移、应力、电势、电位移边界分别为 $S_u, S_\sigma, S_\phi, S_w$, 则 $S_i \cup S_u = S_w \cup S_\phi = \partial\Omega$, $S_i \cap S_u = S_w \cap S_\phi = null$.

2.2 压电控制方程

考虑平面压电问题,假设无外载电荷,极化方向沿厚度(Z 轴)方向,在 XZ 平面下建立压电控制

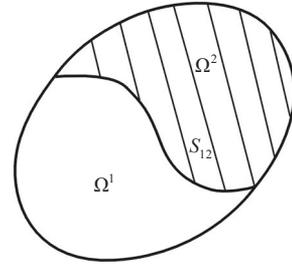


图1 不同材料的子区域

Fig. 1 Two sub-domain of a problem with material heterogeneity

方程^[7].在上述两个子区域组成的问题域中,每个子区域内均为连续的.因此在各子区域均满足力电耦合平衡方程、几何方程及本构方程,如式(8)~(10)所示.

力-电耦合平衡方程

$$\begin{cases} \mathbf{L}_m^T \boldsymbol{\sigma}^i + \mathbf{b} = 0 \\ \mathbf{L}_e^T \mathbf{D}^i = 0 \end{cases} \text{ in } \Omega^i \quad (i=1, 2), \quad (8)$$

几何方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^i = \mathbf{L}_m \mathbf{u}^i \\ \mathbf{E}^i = \mathbf{L}_e \phi^i \end{cases} \text{ in } \Omega^i \quad (i=1, 2), \quad (9)$$

力-电耦合的本构方程

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^i \\ \mathbf{D}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^i & -(\mathbf{e}^i)^T \\ \mathbf{e}^i & \boldsymbol{\kappa}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^i \\ \mathbf{E}^i \end{bmatrix} \text{ in } \Omega^i \quad (i=1, 2). \quad (10)$$

电场强度与电势的关系

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \text{ in } \Omega^i \quad (i=1, 2), \quad (11)$$

其中, $\mathbf{L}_m, \mathbf{L}_e$ 为微分算子, $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ 分别为应力和应变向量, $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \phi$ 分别表示电场强度、电位移和电势.

边界条件及连续性条件阐述如下,

a. 自然边界条件

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^i \mathbf{n}_m^i = \mathbf{t}^i & \text{on } S_t^i \\ \mathbf{D}^i \mathbf{n}_w^i = q_s^i & \text{on } S_w^i \end{cases} \quad (i=1, 2), \quad (12)$$

b. 本质边界条件

$$\begin{cases} \mathbf{u}^i = \bar{\mathbf{u}}^i & \text{on } S_u^i \\ \phi^i = \bar{\phi}^i & \text{on } S_\phi^i \end{cases} \quad (i=1, 2), \quad (13)$$

对于一般弹性体,我们可考虑其位移、电势的连续性和面力均衡的原则,且已证明同时考虑这两个原则收敛效果更好^[3].因此,公共边界的条件可表示为:

$$\text{应力交换条件, } \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n}_m^1 + \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{n}_m^2 = 0 \text{ on } S^{12}, \quad (14)$$

$$\text{电位移交换条件, } \mathbf{D}^1 \mathbf{n}_e^1 + \mathbf{D}^2 \mathbf{n}_e^2 = 0 \text{ on } S^{12}, \quad (15)$$

$$\text{位移连续性条件, } \mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2 \text{ on } S^{12}, \quad (16)$$

$$\text{电势连续性条件, } \phi^1 = \phi^2 \text{ on } S^{12}, \quad (17)$$

其中, q_s^i 表示为电荷面密度边界上的给定面电荷密度, t^i 表示力的自然边界上给定的力, \bar{u}^i , $\bar{\phi}^i$ 分别为力、电本质边界上给定的位移和电势. n_m 为力边界的法向分量, n_e 为电边界的法向分量.

由(8)~(13)可得相应的子区域力-电耦合问题的基本方程为

$$\begin{cases} \mathbf{L}^i \mathbf{U}^i = \mathbf{f}^i & \text{in } \Omega^i \\ \mathbf{B}^i \mathbf{U}^i = \mathbf{g}^i & \text{on } S_t^i, \\ \mathbf{U}^i = \mathbf{h}^i & \text{on } S_u^i \end{cases} \quad i=1, 2 \quad (18)$$

其中, $\mathbf{U}^i = \{u^i \ w^i \ \phi^i\}^T$ 为广义位移向量, \mathbf{f}^i , \mathbf{g}^i , \mathbf{h}^i 为已知向量,

$$\mathbf{L}^i = \begin{bmatrix} c_{11}^i \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{55}^i \frac{\partial^2}{\partial z^2} & (c_{13}^i + c_{55}^i) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & (e_{31}^i + e_{15}^i) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ (c_{13}^i + c_{55}^i) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & c_{55}^i \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{33}^i \frac{\partial^2}{\partial z^2} & e_{15}^i \frac{\partial^2}{\partial x^2} + e_{33}^i \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ (e_{31}^i + e_{15}^i) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & e_{15}^i \frac{\partial^2}{\partial x^2} + e_{33}^i \frac{\partial^2}{\partial z^2} & -\kappa_{11}^i \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \kappa_{33}^i \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^i = \begin{bmatrix} c_{11}^i \frac{\partial}{\partial x} & c_{13}^i \frac{\partial}{\partial z} & e_{31}^i \frac{\partial}{\partial z} \\ c_{13}^i \frac{\partial}{\partial x} & c_{33}^i \frac{\partial}{\partial z} & e_{33}^i \frac{\partial}{\partial z} \\ c_{55}^i \frac{\partial}{\partial z} & c_{55}^i \frac{\partial}{\partial x} & e_{15}^i \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

对力-电耦合问题可施加(14)~(17)式所示的四个边界条件,简单表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{U}^1 - \mathbf{U}^2 = 0 \\ \mathbf{B}^1 \mathbf{U}^1 + \mathbf{B}^2 \mathbf{U}^2 = 0 \end{cases} \quad \text{on } S^{12} \quad (20)$$

3 配点法的实现

设以下符号 $i=1, 2$ 表示不同介质,用配点法对求解域进行离散. N_p^i 为区域 Ω^i 中的节点数;自然边界 S_t^i 上的节点数记为 N_t^i ;本质边界 S_u^i 上的节点数为 N_u^i ; N_s 是公共边界 S^{12} 上的节点数. 每

个区域上的总结点数即为 $N^i = N_p^i + N_t^i + N_u^i + N_s$. 在每个子区域中,其场函数(u, w, ϕ)可由此区域中的形函数插值近似(6)式得到:

$$\mathbf{U}_i^h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Phi^i & 0 & 0 \\ 0 & \Phi^i & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^i \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u^i \\ w^i \\ \phi^i \end{bmatrix} = \Theta^i \mathbf{U}_i^i, \quad i=1, 2 \quad (21)$$

其中, Φ^i 、 \mathbf{U}_i^i 分别为第 i 个区域的形函数向量和广义节点位移向量. 将(21)式代入(18)式可得到:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^2 \\ \mathbf{A}^1 & \mathbf{A}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^i \\ \mathbf{U}_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$\{\mathbf{K}^1 \ \mathbf{F}^1\}$, $\{\mathbf{K}^2 \ \mathbf{F}^2\}$ 分别为各子区域上的刚度矩阵和载荷向量, \mathbf{A} 为由公共边界上的连续性条件和相容性条件得到的刚度矩阵. 式(22)即为离散后 $N^1 + N^2 + N_s$ 个节点所满足的代数方程组,其方程组可由高斯消去法求解.

4 分片铺设压电结构的弯曲分析

图2为分片铺设情况示意图. 考虑图2所示的分片铺设压电悬臂梁,对图中不同铺设情况下压电悬臂梁的弯曲进行分析. 基体层是厚度较大的无极化性质的 AS/3501 Gr/ep 基体,基体长度为 100 mm,厚度为 10 mm. 压电材料为 PZT G-1195N,极化方向沿厚度方向. 3种情况下压电片的厚度均为 1 mm. 图2中(a)压电片长度为 60 mm,(b)、(c)中压电片的长度均为(a)中的一半. (b)中两压电片上下对称铺设,粘在基体表面,施加相反方向的电压;(c)中两压电片也为上下对称铺设,但其内嵌到基体里面,表面和基体水平,同样施以相反方向的电压^[8]. 其材料属性见表1.

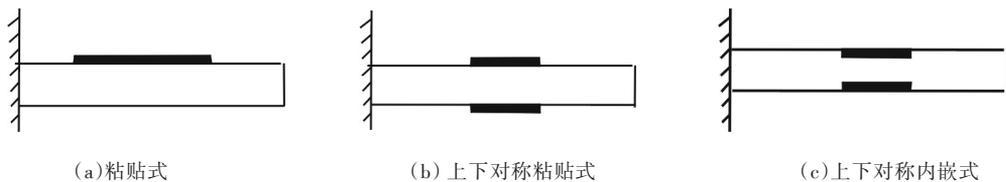


图2 分片铺设情况

Fig. 2 Situations of distributed piezoelectric patches

表1 材料属性

Table 1 Material property

材料属性及符号	弹性模量/GPa			剪切模量/GPa		泊松比		压电系数/(10^{-12} m/V)		
	E_{11}	E_{22}	E_{33}	$G_{12}=G_{13}$	G_{23}	$\mu_{12}=\mu_{13}$	μ_{23}	e_{31}	$d_{31}=d_{32}$	d_{33}
Gr/Epoxy(AS/3501)	144.8	9.65	9.65	7.1	5.92	0.3	---	---	---	---
PZT G-1195N	63.0	63.0	63.0	24.2	24.2	0.3	0.3	---	254	254

首先对同样体积大小的压电材料,施加相同的电压,考虑不同的铺设方式对压电悬臂梁的弯曲程度的影响.设压电片左端到梁左边界的距离为 l (mm),3种情况下均取 $l=20$,施加电压均为 100 V.图 2(a)方式将基体和压电片分成两个子区域,基体均分成 51×6 个数据点,压电片均分成 31×2 个数据点,图 2(b)、(c) 均将基体和压电片分成 3 个子区域,上下压电片均分成 16×2 个数据点,图 2(b)中基体均分成 51×6 个数据点,图 2(c)中基体均分成 51×7 个数据点.在子区域内采用无网格配点法,子域的交界面上分别施加位移、电势连续性条件和力、电相容性条件,得到基体中轴线的弯曲情况如图 3 所示.可以看出,3种铺设方式下分析比较由压电片产生的基体中轴线的挠度,采用图 3(b)、图 3(c)方式铺设的效果均比图 3(a)显著;采用图 3(c)方式铺设时,执行器末端的挠度较大,对基体的变形影响较大;采用图 3(b)方式铺设时,梁的挠度曲线较为光滑,弯曲效果较好,故能实现比较好的控制效果.

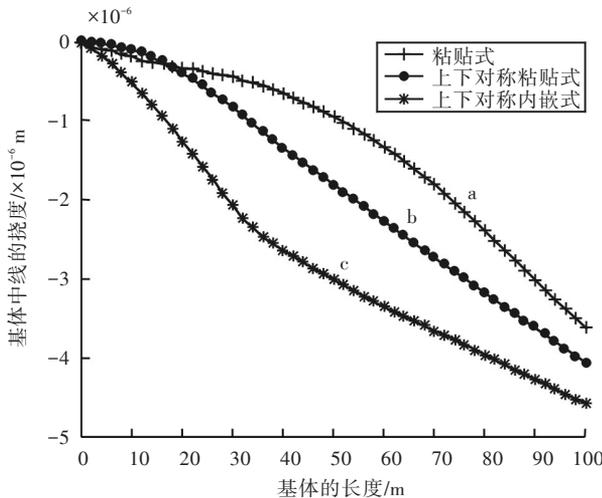


图3 不同铺设方式下基体中轴线的弯曲情况
Fig.3 The bending of matrix axes for different distributed ways

然后分别取 ($l=2, 6, 10, 14, 18, 22$), 在 3 种铺设方式下,分析压电片的不同位置对梁端点的挠度的影响,见表 2.可以看出,同种电压下,压电片自基体左端向右移动时,产生的端点挠度逐渐增大.且采用图 3(b),图 3(c)方式铺设时,执行器末端的挠度增长较快,控制效果显著.

5 结 语

本文根据层合压电结构的不同材料属性,将求解域划分成相应的子区域,在子区域上应用基于径向基函数的无网格配点法,并在子区域的公

表2 相同电压下(100 V)压电片的铺设模式和位置对端点挠度的影响

Table 2 The end point deflection of piezoelectric patches of laying mode and the location under the same voltage (100 V)

l/mm	铺设模式		
	a	b	c
2	$-2.034 1 \times 10^{-6}$	$-2.473 0 \times 10^{-6}$	$-2.758 5 \times 10^{-6}$
6	$-2.280 2 \times 10^{-6}$	$-2.610 5 \times 10^{-6}$	$-3.188 0 \times 10^{-6}$
10	$-2.493 7 \times 10^{-6}$	$-2.844 2 \times 10^{-6}$	$-3.467 1 \times 10^{-6}$
14	$-2.715 0 \times 10^{-6}$	$-3.142 9 \times 10^{-6}$	$-3.648 9 \times 10^{-6}$
18	$-3.086 0 \times 10^{-6}$	$-3.603 9 \times 10^{-6}$	$-4.071 5 \times 10^{-6}$
22	$-3.488 1 \times 10^{-6}$	$-4.118 0 \times 10^{-6}$	$-4.572 7 \times 10^{-6}$

共边界上分别施加位移、电势连续性条件和力、电相容性条件.最后组装总刚度矩阵,得出了求解层合压电结构的子区域配点法,并应用于层合压电结构中.通过数值算例结果表明,分片铺设压电片时,对同样体积大小的压电材料,不同的压电布置会产生不同的对变形的控制效果.采用上下对称粘贴式铺设时,能达到比较好的控制效果.此方法可进一步应用到分片铺设的压电层合板结构中.

致 谢

感谢苏州大学姚林泉教授对论文撰写中提出的重要修改和建议.

参考文献:

[1] Liu G R, Dai K L, Lim K M, et al. A radial point interpolation method for simulation of two-dimensional piezoelectric structures [J]. Smart Mater Struct, 2003, 12: 171-180.

[2] Liew K M, Lim H K, Tan M J, et al. Analysis of laminated composite beams and plates with piezoelectric patches using the element-free Galerkin method [J]. Comput Mech, 2002, 29: 486-497.

[3] Chen J S, Wang L H, Hu H Y, et al. Subdomain radial basis collocation method for heterogeneous media [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 80(2): 163-190.

[4] Sharan M, Kansa E J, Gupta S. Applications of the multiquadric method for the solution of elliptic partial differential equations [J]. Appl Math Comput, 1997, 84: 275-302.

[5] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements [J]. Comput Mech, 1992, 10(5):

- 307-318.
- [6] Liu G R. Mesh free methods: Moving beyond finite element method[M]. Boca Raton: CRC Press LLC, 2002.
- [7] 袁学帅,陈富军,姚林泉. 压电层合结构的子域配点法[C]// 2010全国压电和声波理论及器件技术研讨会,2010, 441-446.
YUAN Xue-shuai, CHEN Fu-jun, YAO Lin-quan. Subdomain collocation method for multilayered piezoelectric material [C]// Proceedings of the 2010 Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves and Device Applications, 2010, 441-446. (in Chinese)
- [8] 姚林泉,俞焕然. 具有压电材料薄板稳定性的有限元法[J]. 兰州大学学报,1999, 35(1):44-48.
YAO Lin-quan, YU Huan-ran. Finite element method of stability for thin plate of piezoelectric material[J]. Journal of Lanzhou University, 1999, 35(1): 44-48. (in Chinese)

Analysis of piezoelectric beam with distributed patches using meshless method

YUAN Xue-shuai

(School of Mathematical, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao 028043, China)

Abstract: To improve the accuracy of meshless method for multilayered piezoelectric, the domain with problem was divided into some sub-domains using point collocation method according to the material properties. On the interface of each sub-domain, the conditions of mechanical and electric reciprocity, displacement and electric potential continuity are imposed, which can be used to glue the two neighboring sub-domain solutions together. Then, a sub-domain point collocation method was presented to solve the multilayered piezoelectric problem and analyze the bending of piezoelectric patches distributed in different ways. The results show that different piezoelectric arrangements have different effects on deformation for the same size of piezoelectric materials, and using the vertically symmetrical pasting can achieve better control effect compared with the other ways.

Key words: multilayered beam; piezoelectric; distributed piezoelectric patches; point collocation method

本文编辑:龚晓宁