文章编号:1674-2869(2014)04-0076-03

# 闭区间有限覆盖的算法

江世宏

(武汉工程大学理学院,湖北 武汉 430205)

**摘　要**:许多经济、管理、军事、计算机和数学领域中的实际问题,可以抽象成为闭区间(或闭区域)的有限覆盖问题. 为了获得这类问题在某种优化约束条件下的局部最优解,需要设计计算机求解算法. 基于贪心法原理,对 $m$ 个闭区间,用 $n(m>n)$ 条线段去覆盖,在覆盖线段总长最小的条件下,给出了如何选取覆盖线段的算法;给出了一个开区间集 $S$ 是否覆盖闭区间 $[a,b]$ 的判定,在可以覆盖的条件下,从中挑选具有最小个数的开区间使之仍能覆盖闭区间 $[a,b]$ 的算法. 为了检验所给算法的正确性,进行了计算机模拟测试.

**关键词**:闭区间;覆盖;贪心法

**中图分类号**:TP 391.41　　**文献标识码**:A　　**doi**:10.3969/j.issn.1674-2869.2014.04.016

## 0　引　言

许多实际问题可抽象成为闭区间(或闭区域)的有限覆盖问题. 如,对发生在海洋某区域的海难进行搜救,参与搜救的各种设备(如舰船、飞机、卫星)所能探测范围有限且不同,如何有效地利用这些设备,对疑拟区域进行搜救,是一个利用多种设备的探测区域去覆盖疑拟区域的问题. 又如,有 $m$ 个居民小区,需配置 $n$ 台信号发射设备覆盖它 $(m>n)$,如何经济地购买与配置 $n$ 台发射设备,是一个多区域的覆盖问题. 有限覆盖定理[1-2]是一个著名的数学定理,它给出了这样一个结论:若开区间集 $S$ 覆盖闭区间 $[a,b]$,则 $S$ 中存在有限个开区间也覆盖 $[a,b]$. 该定理的证明多为存在性的,并非构造性的,即没有给出覆盖 $[a,b]$ 的开区间挑选方法.

本文根据贪心法[3-4],讨论了两种求闭区间有限覆盖的算法,并用计算机对所提出的算法进行了摸拟测试.

## 1　多个闭区间的覆盖问题

### 1.1　问题的提出

用 $i$ 来表示 $x$ 轴上坐标为 $[i,i+1]$ 的闭区间,对于任意给定的 $m$ 个互异正整数,就有 $m$ 个这样的闭区间. 现在要求画若干条线段覆盖住这些闭区间. 其条件是:线段的数目为 $n$,每条线段可以任意长,但要求所画线段的长度之和最小.

### 1.2　求解分析

将 $m$ 个互异正整数按升序排序,并存入 $m$ 维的一维数组 $p$ 中,讨论如下:

(1)当 $n\geqslant m$ 时:可用 $m$ 条长度为 1 的线段覆盖所有闭区间,线段总长的最小值为 $m$.

(2)当 $n=1$ 时:显然,用一条长度为 $p(m)-p(1)+1$ 的线段可以覆盖住所有闭区间.

(3)当 $n=2$ 时:欲用 2 条线段覆盖住所有的闭区间,等价于将 $n=1$ 时的覆盖线段分为两部分,分别覆盖住左边和右边的闭区间,即在 $m$ 个闭区间中的某两个不相邻区间之间断开(如图 1 所示).

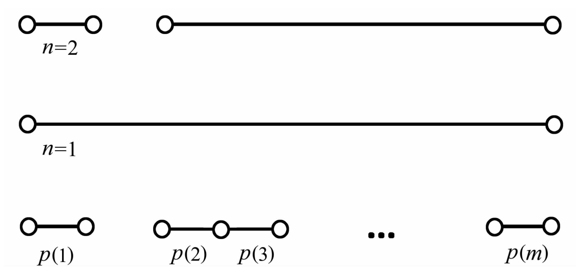


**图 1　多区间的覆盖方法**

Fig. 1　Method of covering intervals

如果在 $p(1)$ 与 $p(2)$ 之间断开,线段的长度将会减少 $p(2)-p(1)-1$. 要获得最小的线段总长,需找到间隔距离最大的两个区间,在它们之间断开即寻找 $d(i)=p(i+1)-p(i)-1(1\leqslant i\leqslant m-1)$ 中的最大者.

(4)当 $n=3$ 时:应在 $n=2$ 时的某种覆盖方案下,将某条线段断成两截,为了得到当前情况

**收稿日期**:2014-03-17

**基金项目**:国家教学研究项目(FIB070335-A2-10)

**作者简介**:江世宏(1958-),男,湖北仙桃人,硕士,副教授. 研究方向:计算数学、现代教育技术应用.

下的最小总长,同样应该在间隔最大的两个区间之间断开. 如果原方案是 $n=2$ 时总长最小的方案,那么这一操作可以得到 $n=3$ 时总长最小的方案.

类似地,当 $n=k(k>1)$ 时,只要在 $n=k-1$ 时总长最小的覆盖方案下,找到被同一条线段覆盖的间隔最大的两个区间,从间隔处断开,就可以得到 $n=k$ 时的最佳覆盖方案.

据上述分析,多区间覆盖问题是一个多阶段决策问题,它满足最优化原理,可运用贪心法来求解.

### 1.3 算法

步骤一:输入 $m$ 个互异正整数,作升序排序,存入一维数组 $p$;输入覆盖线段数 $n$.

步骤二:计算两个相邻区间的间隔距离、间隔区间的左右端点,并存入二维数组 $gap$ 中,即 $gap(1,i)=p(i+1)-p(i)-1$, $gap(2,i)=p(i)+1$, $gap(3,i)=p(i+1)(i=1,2,\cdots,m-1)$.

步骤三:对 $gap$ 中各列,按第一行作降序排序.

步骤四:如果 $n\geqslant m$,用从 $p(i)$ 到 $p(i)+1$ 的线段覆盖区间$(i=1,2,\cdots,m)$,输出总长 $length=m$,线段数 $num=m$;

步骤五:如果 $n=1$,用从 $p(1)$ 到 $p(m)+1$ 的线段覆盖区间,输出总长 $length=p(m)-p(1)+1$,线段数 $num=1$;

步骤六:如果 $2\leqslant n<m$,做以下操作

(1)用从 $p(1)$ 到 $p(m)+1$ 的线段覆盖区间,置总长 $length=p(m)-p(1)+1$,线段数 $num=1$;

(2)当 $num<n$ 时,反复做以下操作

①从覆盖线段中,挖去 $gap(2,num)$ 至 $gap(3,num)$ 这一段;

②更新线段总长 $length=length-gap(1,num)$;

③更新线段数 $num=num+1$.

(3)输出总长 $length$ 和线段数 $num$;

在 MATLAB 下,编写该算法的摸拟检测程序,其程序运行结果如图 2 所示.

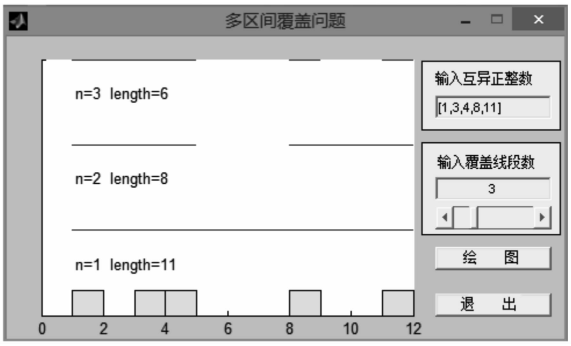


图 2　多区间覆盖方法演示程序

Fig. 2　Program of covering intervals

## 2　闭区间的有限覆盖问题

### 2.1　问题的提出

设有闭区间$[a,b]$和开区间集 $S=\{(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n)\}$,判断 $S$ 是否能覆盖$[a,b]$,如果能覆盖,给出$[a,b]$的一个有限覆盖,但要求使覆盖的开区间个数最少.

### 2.2　求解分析

用二维数组 $I$ 存放开区间集(不妨认为已对 $I$ 中的第一列作了升序排序),即

$$I=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{bmatrix}.$$

欲覆盖闭区间$[a,b]$,其关键是如何从开区间集 $I$ 中挑选出某开区间$(a_i,b_i)$,覆盖左端点 $a$. 为了能用最少的开区间覆盖$[a,b]$,开区间$(a_i,b_i)$应满足条件:$a_i<a$, $b_i-a=d_i>0$ 且 $d_i$ 最大(这就是贪心策略).

具体的挑选过程为:在开区间 $I_i=(a_i,b_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$中,做第一轮挑选. 对所有的 $a_i<a$,计算 $d_i=b_i-a$,存在着 $d_r=\max\{d_i\}$,选出开区间 $I_r=(a_r,b_r)$,它具有以下 3 种情况之一(如图 3 所示). 情况 1:$d_r\leqslant 0$, $I_r$ 未覆盖 $a$;情况 2:$d_r>b-a$, $I_r$ 覆盖 $a$,且覆盖$[a,b]$;情况 3:$0<d_r\leqslant b-a$, $I_r$ 覆盖 $a$,未覆盖$[a,b]$.

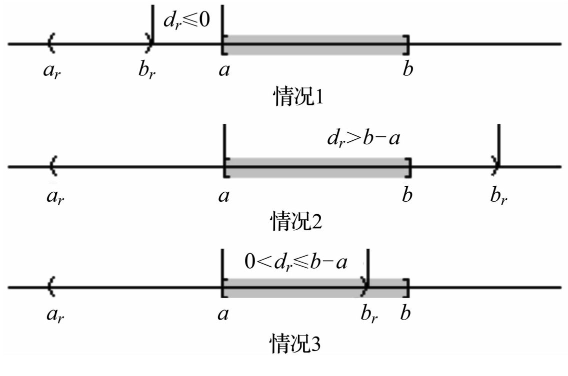


图 3　首选开区间的 3 种可能情况

Fig. 3　Three cases of first opened interval

对于情况 1,可以断言,在开区间集 $I$ 中,无法挑选出有限个开区间,实现对$[a,b]$的覆盖;对于情况 2,可以断言,开区间 $I_r=(a_r,b_r)$已实现对$[a,b]$的覆盖;对于情况 3,取 $a=b_r$,缩小$[a,b]$,再从开区间 $I_i=(a_i,b_i)(i=r+1,r+2,\cdots,n)$中,做新一轮的挑选.

### 2.3　算法

步骤一:输入$[a,b]$, $I$.

步骤二:获取 $I$ 中开区间个数 $n$,对 $I$ 中第 1 列作升序排序.

步骤三：置所选开区间个数 $m=0$，取 $j=1$（即从 $I$ 中第 $j=1$ 个开区间开始进行挑选）.

步骤四：当 $j\leqslant n$ 时，反复做以下操作：

(1) $d=0$（所选开区间对 $a$ 的覆盖距离赋初值），$r=0$（所选开区间序号赋初值）.

(2) 对于 $i=j,j+1,\cdots,n$，反复做以下操作

如果 $I(i,1)<a$ 且 $I(i,2)-a>d$，则 $d=I(i,2)-a,r=i$

(3) 如果 $r>0$，则 $m=m+1,S(m,1)=I(r,1),S(m,2)=I(r,2)$

(4) 如果 $d=0$，则标识变量 $flag=0$，退出挑选操作.

(5) 如果 $d>b-a$，则标识变量 $flag=1$，退出挑选操作.

(6) 如果 $0<d\leqslant b-a$，则 $a=I(r,2),j=r+1$，返回第 4 步.

步骤五：如果 $flag=0$，输出"不能覆盖"信息；否则，输出"可以覆盖"信息，并输出 $S$ 中所存储的 $m$ 个开区间.

在 MATLAB 下，编写该算法的模拟检测程序，其程序运行结果如图 4 所示.

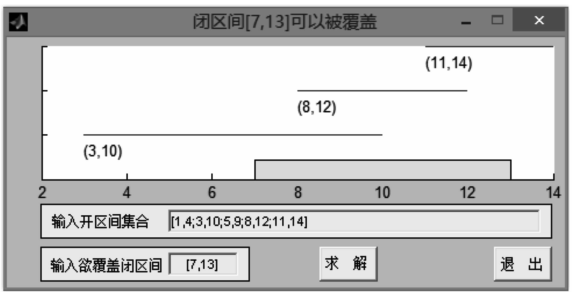


图 4 闭区间覆盖方法演示程序

Fig. 4 Program of covering closed interval

## 3 结 语

闭区间有限覆盖问题，在经济、管理、军事、计算机和数学领域里，具有十分广泛的应用，对该问题的研究，有待进一步深化. 例如，还可以讨论，在要求所有覆盖闭区间的开区间总长最小的条件下，算法的设计问题.

## 致 谢

感谢国家科技部和武汉工程大学对本项目的资助！

### 参考文献：

[1] 郭改慧，李兵方. 有限覆盖定理的应用[J]. 牡丹江大学学报，2013，22(10)：103-104.

[2] 关金玉，徐永春，祁建芳. 用完全覆盖证明实数系中若干定理[J]. 河北北方学院学报：自然科学版，2006，22(3)：6-7.

GUAN Jin-yu, XU Yong-chun, QI Jian-fang. To prove several theorems in real number field by using full covering theorem[J]. Journal of Hebei North University: Natural Science Edition, 2006, 22(3): 6-7. (in Chinese)

[3] 常友渠，肖贵元，曾敏. 贪心算法的探讨与研究[J]. 重庆电力高等专科学校学报，2008，13(3)：41-42，47.

CHANG You-qu, XIAO Gui-yuan, ZENG Min. Exploration of greedy algorithm[J]. Journal of Chongqing Electric Power College, 2008, 13(3): 41-42, 47. (in Chinese)

[4] 崔鹏，刘红静. 测试集问题的综合覆盖贪心算法的深入近似[J]. 软件学报，2006，17(7)：1494-1500.

CUI Peng, LIU Hong-jing. Deep approximation of set cover greedy algorithm for test set[J]. Journal of Software, 2006, 17(7): 1494-1500. (in Chinese)

# Implementation of algorithm covering closed intervals with finite lines

***JIANG Shi-hong***

(School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430205, China)

**Abstract**: Many problems in fields of economic, management, military, computer and mathematics can be described by covering closed intervals (or closed areas) with finite lines. To obtain a local optimal solution of the problem subjected to constraints, it is necessary to design a computer algorithm. Based on the principle of greedy method, an algorithm selecting n line segments with a minimal total length covering $m(m>n)$ closed intervals was proposed, then it was extended to cover a closed interval with a set of opened intervals; a generalized algorithm selecting the fewest opened intervals to cover the given closed intervals was put forward. Finally, computer simulation was carried out to test the validity of these algorithms.

**Key words**: closed interval; coverage; greedy method

本文编辑：苗 变