文章编号:1674－2869(2015)05－0070－04

线性空间映射解析相量法

常翠芝
武汉工程大学电气信息学院,湖北 武汉 430205

摘　要:从线性空间映射的角度对相量法进行解析,并结合香农观点解析了相量法的本质,分析了如何用一个复数来表征一个正弦曲线,指出了正弦空间和相量空间(复数空间)的一一映射关系,在此基础上通过相量变换,将复杂的正弦函数运算转化为简单的复数运算,简化了正弦电路的微分方程的求解和正弦函数的计算过程.教学实践证明,应用这种解析方法加深了学生对相量法和相关概念的理解程度;更重要的是理解这种空间变换不仅有助于掌握相量法这个数学算法,更在于对创造性思维的启发.

关键词:相量法;线性空间;映射
中图分类号:TM11　　**文献标识码**:A　　**doi**:10. 3969/j. issn. 1674-2869. 2015. 05. 014

0 引　言

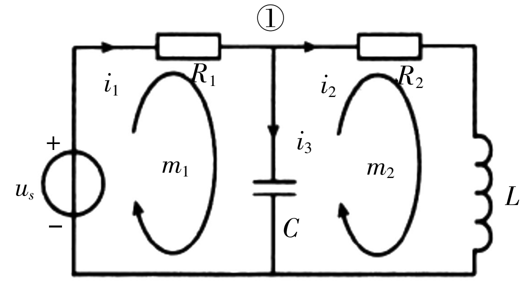
相量法自1893年由德国人C.P. 斯坦梅茨提出后,得到广泛应用.它的提出是电气发展史上的一个里程碑,巨大地推动了电路理论的快速发展,对19世纪80至90年代交流电的普及起到了决定性作用,促使交流设备迅速商品化[1].作为正弦交流线性电路与系统分析中的一个不可取代的算法,相量法已成为学习电类课程必须掌握的重要内容.它避免了繁琐的微分方程求解和时域中三角函数的计算,但是对于这个方法,很多教材阐述得不够详细,初学者很难理解其含义和本质,容易一知半解,从而导致一些概念混淆不清,字母符号使用混乱,故相量法一直是电类基础课教学的重点难点,那么如何让学生理解这一方法并灵活应用, 并且从这一方法得到一些启发,是教学中应特别注意的问题.教学实践证明从线性空间和映射的角度来解析相量法,有助于学生掌握此方法并理解其与正弦函数的联系与区别.

1 两个线性空间的映射

和直流电路相比,正弦交流电路最大的问题是繁复的计算.

1.1 问题的提出

在线性正弦交流电路中,基尔霍夫定律和复杂电路的基本分析方法仍然适用,所以分析起来和直流电路一样,结合元件的伏安关系列方程组是不难的,但是计算或者求解并不轻松,因为电路的激励是正弦形式,涉及到正弦函数的加减甚至乘除计算,例如下面电路图:



对于节点①以电流 i_1、i_2 和 i_3 为变量列写基尔霍夫电流定律KCL约束方程: $-i_1+i_2+i_3=0$.

若已知电流 $i_1(t)=5\cos(314t+60°)$, $i_2(t)=-10\sin(314t+60°)$.则

$$i_3(t)=i_1(t)-i_2(t). \tag{1}$$

同样地,若已知上图中电源 $u_s=10\sqrt{2}\sin(314t+30°)$ V, $i_1=2\sqrt{2}\sin(314t+90°)$ A,那么这个负载网络的等效电阻(阻抗)

$$z=u_s/i_1=?\ . \tag{2}$$

还是以上图为例,在角频率 ω 的正弦电源激励下,含有 R、L、C 的线性电路达到正弦稳态时各处的电压、电流响应称为正弦稳态响应.应用经典法在分析求解时,根据基尔霍夫定律——KCL、KVL及电路的伏安关系,对网孔 m_1 和 m_2 列写KVL方程:

收稿日期:2014-12-29
作者简介:常翠芝(1975-),女,湖北钟祥人,讲师,硕士. 研究方向:电力传动及其控制技术等.

$$R_1i_1+\frac{1}{C}\int i_3\mathrm{d}t=u_s$$

$$R_2i_2+L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{C}\int i_3\mathrm{d}t=0 \tag{3}$$

结合 KCL 约束方程，根据线性电路的性质和线性微分方程解的一般形式，则电路的某一正弦稳态响应（如电容电压 $U_c(t)$）为 $y(t)$，可以将各个待求量化为如下一般形式：

$$a_n\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a_0y(t)=f(t). \tag{4}$$

式(4)中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 与元件参数和电路结构有关，$f(t)$ 与电路正弦激励有关.

式(4)的特解 $y_s(t)$ 即为电路变量 $y(t)$ 的正弦稳态响应.求解 $y_s(t)$ 的经典方法是用待定系数法，根据线性电路的正弦性质，即同一线性电路的各响应和激励的频率相同，一般设 $y_s(t)=B\sin(\omega t+\Phi)$ 为与激励相同频率的正弦量，代入到式(4)中，通过运算得到 $y_s(t)$[2].

显然，当 $n<3$ 时利用待定系数法还是较容易求解的，但是对于 $n>3$ 的高阶微分方程，求解的计算过程就很繁复了，而且容易出错.

1.2　两个线性空间及其映射

无论是对式(1)直接进行正弦函数加减运算，还是求解式(2)的除法运算以及式(4)的微分方程求解，其计算都是繁杂的，这时就需要一种形式简单又行之有效的计算方法，而相量法很好地解决了这个问题.但是很多初学者并不理解相量法的数学内涵或者推理过程，在应用过程中错误百出.

对于相量法本质的理解，可以从香农的经典论文中的阐述“The fundamental problem of communication is that of reproducing at one point either exactly or approximately a message selected at another point”（意思是通信的基本问题就是把一处的信息精确地或者大致地在另外一处再现出来）[3-4]得到启发，数学上把这种“再现”称为变换或映射.这是一种空间变换的思想.

正弦量的信息量由周期 T（或者频率 f）、有效值（或者最大值）及初相位三要素反映出来.在线性电路中，各响应的频率不变，即与激励的频率一致.对任意线性电路的分析求解，实际只有两个要素未知，则解一定可以在一个二元空间内表示.而复数刚好也是一个二维空间，根据线性空间定义，复数和正弦函数显然是线性空间，故符合线性空间的同构条件，即这两个空间是一一映射的[5].

两个线性空间的映射如图 1 中所示.在正弦空间两个或者多个元素直接计算比较麻烦，那么利用空间映射的方法将参与运算的元素投影（映射）到复数空间分别得到唯一对应的像，在复数空间实现相关运算，这个运算过程与原空间（正弦空间）运算相比要简单得多，运算所得结果再反投影（反映射）到正弦空间里.由于两个空间是一一映射，反映射结果是唯一的，即在正弦空间的元素（原像）有且唯一，这正是要求解的结果.这样就避免了直接在正弦空间计算的复杂过程了.由此可见相量法的本质就是利用两个空间的映射关系实现在复数空间运算的方法，而相量就是表示正弦量的复数.

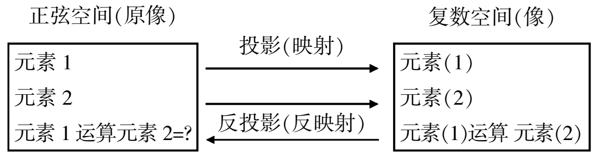


图 1　两个线性空间的映射

Fig.1　Mapping between two linear space

在复数空间，复数的表示式有 4 种：代数式、三角函数式、指数式及极坐标式，这 4 种表示式根据欧拉公式可以相互转化，而在复平面上任一复数可与一有向线段——向量（矢量）对应，向量的长度对应正弦函数的最大值，向量与横轴的夹角与正弦函数的相位对应[6-7].

旋转的向量与正弦函数的对应关系如图 2 所示. 图 2 可以直观的再现复数与正弦量的对应关系.将一在复平面上的一个长度为 I_m、初始位置与横轴（实轴）夹角为 θ 按 ω 角速度匀速旋转的有向线段——向量与最大值为 I_m、初相位是 θ、角频率为 ω 的正弦波在任意时刻一一对应，且旋转的向量在纵轴（虚轴）的投影为：$I_m\sin(\omega t+\theta)$，包含了三个要素且正是正弦量的表达式.

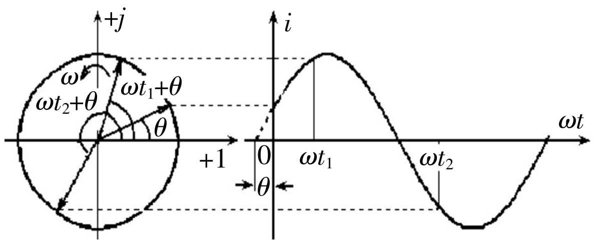


图 2　旋转的向量与正弦函数的对应关系

Fig. 2　The corresponding relationship between the rotating vector and the sine function

当然 ω 是已知量，在表达式中无需表示出来，也就不必参与运算，故只需作静态的向量运算，可取初始向量作运算，表征静态的向量在二维空间即可，如正弦量有效值二维空间可表示为 $\{I,\theta\}$.为了

与中学所学的向量区分开来，这个与正弦量一一对应的特殊向量用相应的物理量的大写字母上面加一点来表示，并称之为相量.例如，$i(t)=\sqrt{2}\,I\sin(\omega t+\theta)\rightarrow\dot{I}=I\angle\theta$（有效值向量）或$\dot{I}_m=I_m\angle\theta$（最大值向量）. 值得初学者注意的是，它们是不同空间的对应关系，不能写成 $i(t)=\dot{I}$这样的等式.

2 复数空间的表示及运算

直流电路中介绍的各种对复杂线性电路的分析方法，在相量空间仍然适用.既然是在不同的空间表示，那么物理量的表示符号就不同，在时域（正弦）空间和复数（相量）空间，基尔霍夫定律和元件的伏安特性表示对应如表 1 所示.

表 1 两空间的关系式对比

Table 1 Contrast of formula in the two space

	时域表示		相量域表示	相量计算电路
电路定律	KCL	$\sum i=0$	$\sum \dot{I}=0$	
	KVL	$\sum u=0$	$\sum \dot{U}=0$	
元件伏安特性方程	$+\ u\ -$ i R(G)	$u=Ri$ $i=Gu$	$\dot{U}_R=\dot{I}R$ $\dot{I}_R=\dot{U}G$	$+\ \dot{U}\ -$ $\dot{I}$ $Z=R$
	$+\ u\ -$ i L	$u=L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ $i=\frac{1}{L}\int u\mathrm{d}t$	$\dot{U}=\mathrm{j}X_L\dot{I}$ $X_L=\omega L$	$+\ \dot{U}\ -$ $Z=j\omega L$
	$+\ u\ -$ i C	$i=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ $u=\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$	$\dot{U}=-\mathrm{j}X_L\dot{I}$ $X_C=1/\omega C$	$+\ \dot{U}\ -$ $\dot{I}$ $Z=-j\frac{1}{\omega C}$
	$+\ u\ -$ i u_s	$u=u_s$	$\dot{U}=\dot{U}_s$	$+\ \dot{U}_s\ -$ $\dot{I}$
	$+\ u\ -$ i i_s	$i=i_s$	$\dot{I}=\dot{I}_s$	$+\ \dot{U}\ -$ $\dot{I}_s$

通过表 1 可以看出，在时域空间列写的微分方程，在向量域就变成代数方程了，前面的图例中，对应的相量空间方程为：

$$-\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=0$$

$$R_2\dot{I}_2+j\omega L\dot{I}_2-\frac{1}{j\omega C}\dot{I}_3=0$$

$$R_1\dot{I}_1+\frac{1}{j\omega C}\dot{I}_3=\dot{U}_s$$

那么对相量空间列写的方程直接求解，求出的结果必然包含两要素，根据对应关系，再映射到时域，即求出瞬时值表达式.

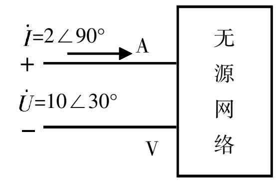
例如,已知正弦电流：$i_1(t)=2\sqrt{2}\sin(100\pi t+60°)$ A，$i_2(t)=3\sqrt{2}\sin(100\pi t+30°)$ A，试求 $i(t)=i_1(t)+i_2(t)$.

在相量空间：$i_1(t)$、$i_2(t)$的有效值相量形式分别为$\dot{I}_1=2\angle 60°$ A、$\dot{I}_2=3\angle 30°$ A，两相量之和

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=(2\angle 60°+3\angle 30°)\ \mathrm{A}$$
$$=(1+j1.732+2.598+j1.5)\ \mathrm{A}$$
$$=(3.598+j3.232)\ \mathrm{A}=4.836\angle 41.9°\ \mathrm{A}$$

故 $i(t)=4.836\sqrt{2}\sin(100\pi t+41.9°)$ A

无源二端网络的等效阻抗也很好计算了，对式（2）求解则有 $Z=10\angle 30°/2\angle 90°=5\angle -60°\Omega$.



特别值得注意的是，阻抗不是相量，而是普通的复数，即相量空间的两个相量之比（如电压相量与电流相量之比）不再是相量空间的相量，故其符号表示与相量符号不同.

3 结　语

相量法作为一种数学处理方法，其本质是不同的线性空间一一映射，文献[3]和文献[4]虽然也阐述了空间变换和映射，但是没有进一步说明两个空间实际是一一映射的关系.相量法对学生的要求是熟练掌握其运算规则，其实如果让学生理解其思想的本质，不仅有利于提高学生分析和解题的能力，更是对学生的思维提供一种创造性的启发，同时联想到拉普拉斯变换和 Z 变换，都是一种空间转换并设法在另一空间实现简单计算的数学算法，这对学生在以后的学习实践中提高解决问题的能力是一种极大的启示.

参考文献：

[1] 张亮亮，雷银照. 相量法历史上的三篇经典文献[J]. 电工技术学报，2013，28(1)：94-96.
ZHANG Liang-liang，LEI Yin-zhao.Three classical papers on the history of the phasor method [J]. Transactions of China Electrotechnical Society，2013，28(1)：94-96. (in Chinese)

[2] 郭洪昌.相量法的产生与其科学性讨论[J].长春师范学院学报：自然科学版，2008，27(3)：38-40.
GUO Hong-chang.Discussion on the production of phasor method and its scientific nnature[J]. Journal of

Changchun Normal University:Natural Science, 2008,27(3):38-40. (in Chinese)

[3] 陈希有,盛贤君,刘凤春. 相量与正弦量的数学变换原理[J]. 电气电子教学学报,2007,29(2):36-39.
CHEN Xi-you, SHENG Xian-jun, LIU Feng-chun. The math transformation principles between phasor and sinusoidal quantity[J]. Journal of Electrical & Electronic Education,2007,29(2):36-39. (in Chinese)

[4] 陆峰,于舒娟,周井泉.基于空间变换的相量法分析[J].现代电子技术,2009(15):78-79,82.
LU Feng,YU Shu-juan,ZHOU Jing-quan.Analysis of phasor based on space transform[J].Modern Electronics Technique,2009(15):78-79,82. (in Chinese)

[5] 杨明,刘先忠.矩阵论[M]. 2 版.武汉:华中科技大学出版社,2005.

[6] 黄元峰,刘晓静,高玉良.电工电子技术[M].北京:人民邮电出版社,2011.

[7] DORF R C, SVOBODA J A.Introduction to electric circuits [M]. 5th edition. Hoboken,New Jersey,UAS: John Wiley & Sons, Inc, 2001.

Analyzing phasor method based on linear space mapping

CHANG Cui-zhi

School of Electrical and Information Engineering,Wuhan Institute of Technology,Wuhan 430205,China

Abstract: We analyzed the phasor method based on linear mapping space combining with the views of Shannon to reveal its essence, meanwhile we explored the way to characterize a sine curve with a complex number, and proposed the one-to-one mapping relation between the sinusoidal space and phasor space. The cumbersome sinusoidal calculation was converted into the simple complex calculation, which simplifies solving differential equation of sinusoidal circuit and sine function; teaching practice proves that this analytic method improves the students′ understanding level to the phasor method and related concepts; more importantly, understanding the transformation between the two spaces not only helps the students master the phasor method as a mathematical algorithms, but also inspires their creative thinking.

Keywords:phasor method;linear space;mapping

本文编辑:苗　变